Секция «Математика и механика»

О неравенствах, связывающих между собой скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа

Седалищев Владимир Викторович

Студент

Новосибирский государственный университет, Механико-математический факультет, Новосибирск, Россия

E-mail: vvs1988@yandex.ru

Пусть T — эндоморфизм пространства Ω с вероятностной мерой λ. Для $f \in L_2(\Omega)$ введем эргодические средние $A_n f = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$. Эргодические теоремы фон Неймана и Биркгофа гарантируют существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f = f^*$, первая теорема в смысле $L_2(\Omega)$, вторая — почти всюду в Ω. Для измерения скорости сходимости п.в. используются $P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup\limits_{k\geq n}|A_k f - f^*| \geq \varepsilon\right\}$. Как было показано в [3], нельзя сказать что-либо о скорости сходимости $\|A_n f - f^*\|_2$, зная только поведение P_n^ε; в тоже время, в работах [2], [3] приводились оценки скоростей убывания P_n^ε при известной скорости убывания $\|A_n f - f^*\|_2$, но они были только в терминах "O" и "o". Следующая теорема уточняет эти результаты в направлении перехода от асимптотических оценок к алгебраическим.

Теорема. Пусть $g \in L_2^0(\Omega)$, т.е. $g \in L_2(\Omega)$ и имеет нулевое среднее, и для любого натурального n выполнено неравенство $\|A_n g\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha}$, где B — некоторая положительная константа, $\alpha \in (0,2]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных $n \geq 2$ выполнено неравенство:

$$P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{k\geq n}|A_k g| \geq \varepsilon\right\} < \varphi(\alpha,n)B\varepsilon^{-2},$$

причем в зависимости от α:

1. Если $\alpha \in (0,1)$, то $\varphi(\alpha,n) = \frac{2^{1+\alpha}}{1-2^{-\alpha}}\left(1 + \frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2}\right)n^{-\alpha}$.
2. Если $\alpha = 1$, то $\varphi(\alpha,n) = 8\frac{(1+\log_2 n)^2+3}{n}$.
3. Если $\alpha \in (1,2]$, то $\varphi(\alpha,n) = 8\left(1 + \frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)n^{-1}$.

Замечание. Неравенство $\|A_n g\|_2^2 \leq Bn^{-\alpha}$ при $g \in L_2^0(\Omega)$ и $\alpha > 2$ может быть выполнено для всех натуральных n только при $g = 0$ тождественно, поскольку в [1] было показано, что степенной скорости сходимости с показателем большим 2 в эргодической теореме фон Неймана не бывает.

Литература

1. Гапошкин В.Ф. Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. №6. С. 1366–1392.

2. Гапошкин В.Ф. Несколько примеров к задаче об ε-уклонениях для стационарных последовательностей // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 46. №2. С. 370–375.

3. Качуровский А.Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // УМН. 1996. Т. 51. №4. С. 73–124.