Секция «Математика и механика»

О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций k-значной логики

Дудакова Ольга Сергеевна

Кандидат наук

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: olga.dudakova@gmail.com

Известно, что при $k \leq 7$ все предполные классы в P_k являются конечно-порожденными, а начиная с $k = 8$ существуют предполные классы монотонных функций, не имеющие конечного базиса; полного описания конечно-порожденных предполных классов монотонных функций к настоящему времени не получено. В работах автора [1–4] приведен критерий конечной порожденности для предполных классов функций, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины два, а также условия существования конечных порождающих систем для ряда других семейств классов монотонных функций. В данной работе продолжены исследования в этом направлении.

Обозначим через $\mathcal{P}$ частично упорядоченное множество $(E_k, \preccurlyeq)$, где $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$; будем считать, что множество $\mathcal{P}$ имеет наименьший и наибольший элементы. Через $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ будем обозначать класс всех монотонных функций над $\mathcal{P}$ (отметим, что класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ предполный).

Функцию $\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ будем называть *функцией выбора аргумента*, если для каждого набора $(i, a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{P}^{k+1}$ выполняется равенство $\lambda(i, a_1, \ldots, a_k) = a_i$. Положим $\mathcal{P}_\lambda = \{(a, b_1, \ldots, b_k) \in \mathcal{P}^{k+1} \mid \text{ если } i \preccurlyeq j, \text{ то } b_i \preccurlyeq b_j\}$. Назовем *монотонной функцией выбора аргумента* функцию $\nu(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ из $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$, такую, что $\nu \mid_{\mathcal{P}_\lambda} = \lambda$.

Утверждение. *Если класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ содержит монотонную функцию выбора аргумента, то он является конечно-порожденным.*

Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное множество ширины два. Класс $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ содержит монотонную функцию выбора аргумента тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in \mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$ существует либо $\sup(a, b)$, либо $\inf(a, b)$.*

Литература

1. Дудакова О. С. О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 31–37.

2. Дудакова О. С. О конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций в P_k // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 65–71.

3. Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций девятизначной логики // Мат-лы XVIII Междунар. школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2009. — С. 38–41.

4. Дудакова О. С. О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины три // Мат-лы X Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.) — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2010. — С. 178-180.