Секция «Математика и механика»

К задаче фильтрации одномерных диффузионных процессов

Асадуллин Эльдар Маратович
Аспирант
Уфимский государственный авиационный технический университет, Общенаучный факультет, Уфа, Россия
E-mail: mrsine@mail.ru

Рассматривается задача фильтрации диффузионного процесса $z(t) = (x(t), y(t))$, удовлетворяющего системе уравнений Ито

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b^1(s, z(s))\, ds + \int_0^t \sigma^1(s, z(s))\, dW_1(s) + \int_0^t \sigma^2(s, z(s))\, dW_2(s), \qquad (1)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t b^2(s, z(s))\, ds + \int_0^t \sigma^0(s, y(s)) dW_2(s), \qquad (2)$$

где $W_1(t)$, $W_2(t)$, $t \in [0, T]$ – независимые винеровские процессы. Процесс $y(t)$ считается доступным для наблюдений, а $x(t)$ – нет.

Известно [3], что решение системы (1)-(2) ищется в виде $x(t) = \widetilde{\phi}(t, W_1(t), W_2(t))$, $y(t) = \widetilde{\psi}(t, W_2(t))$, где

$$\widetilde{\phi}'_u(s, u, W_2(s)) = \sigma^1(s, \widetilde{\phi}(s, u, W_2(s)), \widetilde{\psi}(s, W_2(s))),$$

$$\widetilde{\phi}'_v(s, W_1(s), v) = \sigma^2(s, \widetilde{\phi}(s, W_1(s), v), \widetilde{\psi}(s, v)), \quad \widetilde{\psi}'_v(s, v) = \sigma^0(s, \widetilde{\psi}(s, v)),$$

откуда получаем, что

$$y(s) = \psi(s, W_2(s) + C(s)). \qquad (3)$$

$$x(s) = \phi(s, y(s), W_1(s) + \widetilde{D}(s, y(s))), \qquad (4)$$

где $\phi(s, y, u)$, $\psi(s, v)$ – детерминированные функции, а $C(s)$ и $\widetilde{D}(s, y(s))$ – неизвестные функции, удовлетворяющие некоторым дифференциальным уравнениям.

Показано [1], что исходную задачу можно редуцировать к решению задачи фильтрации процессов $(\widetilde{x}(s) = W_1(s) + \widetilde{D}(s, \psi(s, \widetilde{y}(s)))$, $\widetilde{y}(s) = W_2(s) + C(s)$, являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_0 + \int_0^t B^1(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s)) ds + W_1(t) + \int_0^t \widetilde{\sigma}^2(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s)) dW_2(s),$$

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}_0 + \int_0^t B^2(s, \widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s)) ds + W_2(t),$$

где $\widetilde{x}_0 = \phi^{-1}(0, y_0, x_0)$, $\widetilde{y}_0 = \psi^{-1}(0, y_0)$. B^1, B^2 – коэффициенты выражающиеся через коэффициенты задачи (1)-(2).

Для задачи фильтрации процессов $(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$ можно построить уравнение для ненормализованной фильтрационной плотности [2], [4], при этом наблюдаемый процесс $\widetilde{y}(s)$ совпадает с обновляющим. Решение задачи фильтрации для $(\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s))$ позволяет решить аналогичную задачу не только для исходных процессов $(x(s), y(s))$, но и для некоторого класса диффузионных процессов, которые могут быть представлены в виде соотношений (3) и (4).

Литература

1. Асадуллин Э.М., Насыров Ф.С. О задаче фильтрации диффузионных процессов. Уфимский математический журнал. Принято к печати. 2011.

2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.В. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

3. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и стохастический анализ. Теория вероятности и ее применение, том 51, в.3, с.496-517, 2006.

4. Розовский Б.Л. Эволюционные стохастические системы. М.: Наука, 1983.

Слова благодарности

Автор признателен проф. Насырову Ф.С. за внимание к работе.