Секция «Математика и механика»

О преобразовании Лапласа некоторых функционалов «максимального» типа от скошенного броуновского движения и случайного блуждания

Люлько Ярослав Александрович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: yaroslav.lyulko@gmail.com

Рассмотрим процесс $X^\alpha = (X_t^\alpha)_{t\geq 0}$, который является скошенным случайным блужданием в дискретном случае, и скошенным броуновским движением в непрерывном случае. А именно, пусть $W^\alpha = (W_t^\alpha)_{t\geq 0}$ – скошенное броуновское движение, а $S^\alpha = (S_k^\alpha)_{k\geq 0}$ – скошенное случайное блуждание с параметром $\alpha \in [0,1]$. Тогда $X_t^\alpha = W_t^\alpha$ при $t \in [0,\infty)$, и $X_k^\alpha = S_k^\alpha$ при $t = k = 0,1,\dots$ Заметим, что процесс S^α является дискретным аналогом процесса W^α в том смысле, что $n^{-1/2}S_{[nt]}^\alpha \xrightarrow{Law} W_t^\alpha$ при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D[0,\infty)$ (см. [1]).

Пусть случайная величина $\theta \sim Exp(\lambda^2/2)$ в непрерывном случае и $\theta \sim Geom(q)$ (то есть $\mathsf{P}(\theta = k) = (1-q)q^k$, $k = 0,1,\dots$) в дискретном случае. При этом θ не зависит от процесса X^α. Введем следующие моменты:

$$g_T = \sup\{t < T : X_t^\alpha = 0\},\ d_T = \inf\{t \geq T : X_t^\alpha = 0\},\ T > 0.$$

Рассмотрим случайный промежуток времени $\Delta = [a,b]$, где $a, b \in \{g_\theta, \theta, d_\theta\}$. При различных значениях a и b получим шесть функционалов

$$\begin{array}{ll} 1)\ \sup\limits_{0\leq t\leq\theta} X_t^\alpha, & 4)\ \sup\limits_{g_\theta\leq t\leq\theta} X_t^\alpha, \\ 2)\ \sup\limits_{0\leq t\leq g_\theta} X_t^\alpha, & 5)\ \sup\limits_{\theta\leq t\leq d_\theta} X_t^\alpha, \\ 3)\ \sup\limits_{0\leq t\leq d_\theta} X_t^\alpha, & 6)\ \sup\limits_{g_\theta\leq t\leq d_\theta} X_t^\alpha, \end{array}$$

распределения которых были найдены в настоящей работе. В частности, распределение функционала $\sup_{0\leq t\leq\theta} W_t^\alpha$ имеет вид

$$\mathsf{P}(\sup_{0\leq t\leq\theta} W_t^\alpha \leq A) = \frac{(1-(2\alpha-1)e^{-\lambda A})(1-e^{-\lambda A})}{1+(2\alpha-1)e^{-\lambda A}},\ A \geq 0.$$

Следует отметить, что настоящая работа является продолжением работы [2], в которой были найдены распределения функционалов вида 1) – 6) от модуля $(|B_t|)_{t\geq 0}$ стандартного броуновского движения $B = (B_t)_{t\geq 0}$. Это соответствует случаю $\alpha = 1$.

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

Литература

1. *Fujita T., Yor M.* On the remarkable distributions of maxima of some fragments of the standard reflecting random walk and Brownian Motion. – Probab. Math. Statist., 2007, v.27, p. 89-104.

2. *Harrison J., Shepp L.* On skew Brownian motion. – Ann. Probab., 1981, v.9, №2, p. 309-313.