Секция «Математика и механика»

Системы с нетерпеливыми клиентами в условиях высокой загрузки

Белорусов Тимофей Николаевич
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: timophey.belorusov@gmail.com

Рассматривается одноканальная система обслуживания с нетерпеливыми клиентами. Требование, заставшее в системе j требований, независимо от других с вероятностью f_j остаётся в системе до завершения обслуживания, а с вероятностью $1-f_j$ навсегда покидает её, $f_j \in [0,1]$. Входной поток $A(t)$ регенерирующий с интенсивностью λ. Времена обслуживания $\{\eta_j, j \geq 1\}$ являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами со средним b. Предположим, что существует $\lim_{j\to\infty} f_j = f$. Установлено (см. Белорусов [1]), что в этом случае система эргодична, если $\lambda bf < 1$, и неэргодична, если $\lambda bf > 1$. В случае $\lambda bf = 1$ система может оказаться как эргодичной, так и неэргодичной.

Опишем ситуацию высокой загрузки. Для этого введём семейство $\{S_\varepsilon\}$ систем обслуживания с входным потоком $A_\varepsilon(t)$. Асимптотика сжатия времени определяется соотношением $A_\varepsilon(t) = A(\alpha_\varepsilon t)$, где $\alpha_\varepsilon = (1-\varepsilon)/(\lambda bf)$. Пусть τ_i — период регенерации с номером i, ξ_i — приращение потока на i-ом периоде регенерации, а $W_\varepsilon(t)$ и $Q_\varepsilon(t)$ — процессы виртуального времени ожидания и количества требований для S_ε.

Теорема. *Существует $\delta > 0$, такое что $E\tau_1^{2+\delta} < \infty$, $E\xi_1^{2+\delta} < \infty$, $E\eta_1^{2+\delta} < \infty$. Последовательность $\{f_j\}$ убывает, $f_j \to f$, $j \to \infty$, и $\sum_{j=1}^{\infty}(f_j - f) < \infty$. Тогда для системы с нетерпеливыми требованиями в асимптотике сжатия времени справедливы соотношения*

$$P\Big(W_\varepsilon(t) \leq \frac{x}{\varepsilon}\Big) \to 1 - \exp\Big\{-\frac{2ab}{\sigma^2}x\Big\}, \quad \varepsilon \to 0,$$
$$P\Big(Q_\varepsilon(t) \leq \frac{x}{\varepsilon}\Big) \to 1 - \exp\Big\{-\frac{2ab^2}{\sigma^2}x\Big\}, \quad \varepsilon \to 0,$$

где σ^2 выражается в терминах τ_1 и ξ_1.

Доказательство основывается на сравнении системы S_ε с соответствующей системой без ограничений. Используются результаты Боровкова [2].

Основное внимание в докладе уделяется примерам систем с нетерпеливыми клиентами, для которых нарушаются некоторые условия приведённой выше теоремы. Показано, что в случае немонотонной последовательности также может иметь место сходимость к экспоненциальному распределению. Приведены примеры сходимости к неэкспоненциальному распределению.

Литература

1. Белорусов Т.Н. Эргодичность многоканальной системы обслуживания с возможностью неприсоединения к очереди // Теория вероятностей и её применения. М., 2011. Т. 18. В. 1. (В печати)

2. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

Слова благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Афанасьевой Ларисе Григорьевне за постоянное содействие и координирование научной деятельности.