Секция «Вычислительная математика и кибернетика»

Оценка функций концентрации U-статистик

Зубайраев Тимур Асламбекович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва, Россия
E-mail: tzubayraev@gmail.com

Пусть $X, X_1, ..., X_N$ одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в произвольном измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$. Пусть ϕ_1: $\mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ и ϕ: $\mathfrak{X}^2 \to \mathbb{R}$ измеримые функции. Предположим, что ϕ симметрична, т.е. $\phi(x,\, y) = \phi(y,\, x)$ для любых $x,\, y \in \mathfrak{X}$. Предположим, что

$$\mathrm{E}\phi_1(X) = 0,\ \mathbb{E}\phi(x, X) = 0 \text{ для всех } x \in \mathfrak{X},$$
$$\mathrm{E}\phi(x, X) < \infty,\ \mathbb{E}\phi_1^2(X) < \infty.$$

Определим U-статистику T_*

$$\mathrm{T}_* = \sum_{1 \le i < k \le N} \phi(X_j, X_k) + f_1(X_1, \ldots, X_M) + f_2(X_{M+1}, \ldots, X_N), \text{где} 1 \le M \le N/2,$$
$$\phi(X_j, X_k) = \langle \mathbb{Q}X_j, X_k \rangle,$$

где $\mathbb{Q}X = (0, q_1 x_1, q_2 x_2 \ldots)$ - оператор Гильберта-Шмидта, $f_1 = f_1(X_1, \ldots, X_M)$ произвольная статистика, зависящая только от $X_1, \ldots, X_M$, $f_2 = f_2(X_{M+1}, \ldots, X_N)$ также произвольная статистика не зависящая от $X_1, \ldots, X_M$.

Рассмотрим функцию концентрации U-статистики T_*

$$\mathrm{Q}(\mathrm{T}_*; \lambda) = \sup_x \mathbb{P}\{x \le T_* \le x + \lambda\}, \lambda \ge 0.$$

Основная задача исследования - получение оценки для $Q(T_*, \lambda)$ имеющей порядок $O\left(|q_9^{-\alpha}|\right)$(i-е по порядку собственное значение оператора), вместо полученной в [2] оценки $O\left(\exp\{-c|q_9|\}\right)$. Результат был получен путем использования новых условий невырожденности аналогичных примененным в [1]: наши условия невырожденности отличаются на некоторое условие на детерминант матрицы составленной из элементов вида $\phi(S_{mi}, S_{mj}), S_{mi}$- i-ая независимая копия суммы $S_m = m^{-1/2} \sum_{i=1}^m X_i$. Итоговый результат сформулирован в виде теоремы.

Теорема 1 *Пусть* $q_9 \neq 0$,$\gamma_3 = \mathbb{E}\left|\phi\left(X, \bar{X}\right)\right|^3$, $\gamma_{3,3/2} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left\{\left|\phi\left(X, \bar{X}\right)\right|^3 |X\right\}\right)^{3/2}$ *и* $m = m_0$, *где* $m_0 \asymp |q_1 \ldots q_9|^{-3}(|q_1 \ldots q_9|^{-3}\gamma_{2,3/2} + \gamma_3)$.

Тогда, при некоторой постоянной c

$$Q(T_*; \lambda) \le c(|q_9|^{-9} + max\{1, |q_9|^{-18}\})\frac{\max\{\lambda; m_0\}}{M}.$$

Литература

1. 1.Ulyanov, V., Götze, F.: Uniform approximations in the CLT for balls in euclidian spaces, 00-034, SFB 343. University of Bielefeld, 2000, 26 p. <http://www.math.uni-bielefeld.de/sfb343/preprints/pr00034.pdf.gz>.
2. 2. Bentkus, V., Götze, F.: Optimal bounds in non-Gaussian limit theorems for U-statistics. Ann.Prob. 27, no.1, 454-521 (1999)
3. 3. S.A. Bogatyrev, Götze F., V.V. Ulyanov: Non-uniform bounds for short asymptotic expansions in the CLT for balls in a Hilbert space, Journal of Multivariate Analysis 97 (2006) 2041 - 2056

Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя В.В. Ульянова за помощь в достижении результата