

# СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА»

## ПОДСЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА»

### О решении задачи фильтрации одномерных диффузионных процессов

*Асадуллин Эльдар Маратович*

*студент*

*Уфимский государственный авиационный технический университет,*

*Уфа, Россия*

*E-mail: [mrsine@mail.ru](mailto:mrsine@mail.ru)*

Рассматривается задача фильтрации диффузионного процесса  $(x(t), y(t))$ , удовлетворяющего системе уравнений Ито

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \int_{[0,t]} b^1(s, x(s), y(s)) ds + \int_{[0,t]} \sigma^1(s, x(s), y(s)) dv(s) + \int_{[0,t]} \sigma(s, x(s), y(s)) dw(s), \\y(t) &= y_0 + \int_{[0,t]} b^2(s, x(s), y(s)) ds + \int_{[0,t]} \sigma^0(s, y(s)) dw(s),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $v(s), w(s)$  – независимые винеровские процессы,  $y(t)$  – наблюдаемая компонента, а  $x(t)$  – ненаблюдаемая.

Известно [1, 3], что решение задачи фильтрации может быть сведено к нахождению ненормализованной фильтрационной плотности  $V(t, x)$ , которая удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned}dV(t, x) &= [(a(t, x, Y(t)) V)_{xx} - (b^1(t, x, Y(t)) V)_x] dt + \\&+ [-(\sigma(t, x, Y(t)) V)_x + h(t, x, Y(t)) V] d\tilde{w}(t), \quad V(0, x) = \pi_0(x),\end{aligned}\quad (2)$$

здесь  $a = \frac{1}{2}[(\sigma^1)^2 + (\sigma)^2]$ ,  $h = b^2 / \sigma^0$ , а  $\tilde{w}(t)$  – винеровский процесс, полученный в процессе применения теоремы Гирсанова с целью «уничтожения сноса» в уравнении для наблюдаемого процесса, которое после этого принимает вид

$$y(t) = y_0 + \int_{[0,t]} \sigma^0(s, y(s)) d\tilde{w}(s).\quad (3)$$

Для нахождения ненормализованной фильтрационной плотности необходимо знать структуру наблюдаемого процесса. Известно [2], что решение уравнения (3)  $y(t) = y(t, \tilde{w}(t))$  находится из цепочки уравнений

$$y_u(t, u) = \sigma^0(t, y(t, u)), \quad y_t(t, \tilde{w}(t)) = -\frac{1}{2} \sigma_y^0(t, y(t, \tilde{w}(t))) \sigma^0(t, y(t, \tilde{w}(t))), \quad y(0, \tilde{w}(0)) = y_0$$

Тогда решение уравнения (2) ищется в виде  $V(t, x) = V(t, x, \tilde{w}(t))$  и сводится к решению цепочки дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}V_u(t, x, u) &= -[\sigma(t, x, y(t, u)) V(t, x, u)]'_x + h(t, x, y(t, u)) V(t, x, u), \\V_t(t, x, \tilde{w}(t)) &= [\frac{1}{2}(\sigma^1)^2] V_{xx} + [2a_x - b^1 + \frac{1}{2}(\sigma_y \sigma^0 + 2\sigma h - 3\sigma \sigma_x)] V_x + \\&+ [a_{xx} - b_x^1 + \frac{1}{2}(\sigma_y (h_x - \sigma_{xx}) - \sigma^0 (h_y - \sigma_{xy}) - (h - \sigma_x)^2)] V.\end{aligned}$$

$$V(0, x, \tilde{w}(0)) = \pi_0(x)$$

## О спектре возмущенного оператора Лапласа- Бельтрами в $L^2(S^3)$

**Атнагулов Арсэн Ильгизович**

студент

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

E-mail: russtudent1@yandex.ru

### Результаты

В работе рассматривается оператор Лапласа- Бельтрами в  $L^2(S^3)$

$$H_0 u = -\frac{1}{\sin^2 \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta_2 \frac{\partial u}{\partial \theta_2} \right) + \frac{H_0 u}{\sin^2 \theta_2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi$$

$H_0$  - оператор Лапласа-Бельтрами в переменных  $\varphi$  и  $\theta_1$ , имеющий вид

$$-\Delta_{\theta, \varphi} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Спектр состоит из чисел  $\lambda_n = n(n+2)$  кратности  $(n+1)^2$ . Соответствующий ортогональный проектор на собственное подпространство имеет ядро

$$P_\ell(\omega, \omega_0, z) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin(\ell+1)\alpha}{\sin \alpha}, \quad \text{где } \alpha \text{ - угол между } \omega \text{ и } \omega_0$$

Мы показываем, что ядро оператора  $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$  равно

$$R_0(\omega, \omega_0, z) = \sum_0^\infty P_n(\omega, \omega_0) [n^*(n+2) - z]^{-1}$$

Мы также изучаем распределение спектра возмущенного оператора  $H = H_0 + V$ , где  $V$  - оператор умножения на функцию  $v(\omega) \in C^2(S^3)$ .

Ранее спектр оператора Лапласа- Бельтрами подробно изучался в пространстве  $L^2(S^2)$  (с библиографией можно ознакомиться в работе [1]).

### Центральная предельная теорема для случайных величин, принимающих р-адические значения

**Белошанка Ольга Валериевна**

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: obeloshapka@yandex.ru

Полученная Центральная предельная теорема для случайных величин, принимающих значения в пространстве над полем р-адических чисел, а также аналог этой теоремы для обобщенных функций, принимающих значения над полем р-адических чисел. В первом случае предельной мерой является р-адический аналог меры Гаусса, задаваемый ее преобразованием Фурье. Во втором случае предельным распределением является р-адический аналог меры Фурье, задаваемый его преобразованием Фурье.

ЦПТ для обобщенных мер можно использовать для аппроксимации фейнмановских интегралов интегралами по счетно-аддитивным комплекснозначным мерам. Предельным распределением является мера Фейнмана на локально выпуклых пространствах.

Полученный результат подтверждает естественность определения преобразования Фурье функций р-адического аргумента, данного в книге Владимирова В.С., Воловича И.В., Зеленова Е.И., «Р-адический анализ и математическая физика».

## Прогнозирования количества клиентов фирмы с учетом фактора сезонности

Богданова Марина Евгеньевна

аспирантка

Финансовая академия при правительстве РФ, Москва, Россия

E-mail: marina\_bogdanova@list.ru

Проблемы прогнозирования объема продаж и количества клиентов являются одними из ключевых задач фирмы, особенно в случае запуска рекламной кампании либо планирования поставки товаров на склад.

Рассмотрим линейную регрессионную модель временного ряда  $y_t = a \cdot t + b_t + O_t = T_t + O_t$  на примере понедельных данных реальной фирмы за 3-хлетний период с 2005 по 2007 и построим прогноз количества клиентов на 13 недель 2008 года.

Обозначим остатки линейной регрессии  $O_t = \tilde{y}_t - \hat{y}_t$ , где

$\tilde{y}_t$  - фактическое количество клиентов,

$\hat{y}_t$  - количество клиентов по регрессионной модели.

Затем находим все 52 средние сезонные компоненты остатков по формуле

$$S_t = \frac{O_t + O_{t+52} + O_{t+2 \cdot 52}}{3} \text{ и границы}$$

их изменения  $S_t$ :  $S_t \pm s$ , где

$$s = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n - k}} \text{ - стандартная ошибка}$$

сезонной компоненты.

Применяя метод Монте-Карло, генерируем 1000 нормально распределенных случайных величины для каждого  $S_t$  в пределах  $S_t \pm s$  и находим средние сезонные компоненты по 1000 значениям, которые и

используем в качестве случайных остатков модели для прогноза (F) количества клиентов фирмы. Расчетная формула имеет вид:  $F_t = 26 \cdot t + 7772 + \bar{S}_t$ .

Оценивая адекватность модели, находим среднеквадратическую ошибку модели  $E = \Sigma O^2 / \Sigma (T+S)^2$ , которая равна 3,9% и говорит о хорошем качестве модели. Ошибка прогноза по контролирующей выборке составила 2,7%, что подтверждает адекватность построенной модели.

Расчеты показывают, что на 10-ой неделе, перед 8 марта, ожидается рост количества клиентов на 44,4% по сравнению с предыдущим годом. Этот прогноз дает возможность менеджерам планировать объем закупок товаров перед праздником и увеличить количество продавцов-консультантов на предпраздничные дни.

По аналогичной схеме можно прогнозировать объем продаж. Эту модель можно использовать также в более сложной модели количества клиентов с включением фактора рекламы.



**Об асимптотической оптимальности второго порядка в минимаксной задаче  
наискорейшего обнаружения разладки для броуновского движения**

**Бурнаев Евгений Владимирович**

*младший научный сотрудник*

*Институт проблем передачи информации, Москва, Россия*

*E-mail: burnaev@iitp.ru*

**Введение. Постановка задачи**

Пусть  $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$  – фильтрованное вероятностное пространство,  $(B_t)_{t \geq 0}$  – стандартное броуновское движение. Наблюдается процесс  $X_t = \mu \max(0, t - \theta) + \sigma B_t$ , где  $\mu \neq 0$ ,  $\sigma > 0$  и  $\theta$  – параметр, принимающий значения в  $[0, \infty]$  и интерпретируемый как момент возникновения разладки. Обозначим через  $P_\theta = \text{Law}(X | P, \theta)$  распределение процесса  $X$  в предположении, что разладка произошла в момент  $\theta$ , а через  $E_\theta$  – усреднение по мере  $P_\theta$ . Пусть  $M_T = \{\tau : E_\infty \tau = T\}$  – класс конечных рандомизированных (определение см. в [2]) марковских моментов останковки, для которых среднее время до ложной тревоги равно  $T > 0$ . Будем использовать минимаксный риск  $C(T) = \inf_{\tau \in M_T} \sup_{\theta \geq 0} E_\theta(\tau - \theta | \tau \geq \theta)$ , который “измеряет” среднее время запаздывания в определении момента разладки. В [3] было показано, что в  $M_T$  найдется нерандомизированный момент  $\tau_T$ , который будет асимптотически (при  $T \rightarrow \infty$ ) оптимальным первого порядка, при этом  $C(T) \in [\underline{C}(T); \bar{C}(T)]$ , где  $\underline{C}(T) = \bar{C}(T) - 1$ ,  $\bar{C}(T) = \log T - E + O(\log^2 T/T)$ ,  $E$  – константа Эйлера. Надо найти такой рандомизированный момент  $\tau_T^* \in M_T$ , для которого верхняя и нижняя оценки риска совпадут при  $T \rightarrow \infty$ .

**Основной результат**

Пусть плотность  $g_A(x)$  удовлетворяет уравнению  $L_\infty g_A(x) = 0$  и условиям  $g_A(A) = 0$ ,  $\int_0^A g_A(x) dx = 1$ , где  $L_\infty$  – инфинитезимальный генератор процесса Ширяева-Робертса  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  [1,3]. Положим  $\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq A\}$ , где  $A = A(T)$  – решение уравнения  $E_\infty \tau_T^* = T$ , начальное значение  $\psi_0$  процесса  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  является случайной величиной, не зависящей от  $(B_t)_{t \geq 0}$ , с плотностью распределения  $g_A(x)$ . Тогда момент останковки  $\tau_T^*$  будет асимптотически (при  $T \rightarrow \infty$ ) оптимальным второго порядка, при этом  $C(T) = \log T - (1 + E) + O(\log^2 T/T)$ . Более того, плотность  $g_A(x)$  представляет собой первый член разложения квазистационарного распределения процесса  $(\psi_t)_{t \geq 0}$  по степеням минимального собственного числа генератора  $L_\infty$  при  $A \rightarrow \infty$  [1].

**Формула Фейнмана для диффузии частиц с переменной массой**

**Бутко Яна Анатольевна**

*Доцент, к.ф.-м.н.*

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,*

*Факультет фундаментальных наук;*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,*

*Механико-математический факультет*

[yanabutko@yandex.ru](mailto:yanabutko@yandex.ru)

Рассмотрено параболическое уравнение второго порядка с зависящими от координаты коэффициентами при старших производных в области  $R^n$ . Такие уравнения описывают

диффузию (квази)частиц с переменной массой, возникающих в математических моделях полупроводников. Получено представление решения задачи Коши-Дирихле для такого уравнения с помощью формулы Фейнмана, то есть в виде предела конечнократных интегралов по декартовым степеням рассматриваемой области от элементарных функций, зависящих от коэффициентов уравнения и начально-краевых условий. Так как решение подобного уравнения может быть представлено также в виде функционального интеграла по мере гауссовского типа с переменным коэффициентом диффузии, то полученная формула Фейнмана фактически даёт конечномерные аппроксимации такого интеграла, пригодные для непосредственных вычислений.

**О некоторой последовательности элементов  
в гильбертовом пространстве, не являющейся базисом**

**Бухтина Ирина Петровна**

студент

Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: [Irina.Bukhtina@gmail.com](mailto:Irina.Bukhtina@gmail.com)

Хорошо известно понятие наклона  $\delta(H_1, H_2)$  двух подпространств  $H_1, H_2$  гильбертова пространства  $H$ , введенное М.М. Гринблумом в [2]:

$$\delta(H_1, H_2) = \inf_{h_1 \in S(H_1), h_2 \in H_2} \|h_1 + h_2\|,$$

где  $S(H_1) = \{h \in H_1 : \|h\| = 1\}$  – единичная сфера.

Также известен следующий критерий базисной последовательности, сформулированный Гринблумом в [1]:

*Теорема 1.* Для того чтобы последовательность  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$  была базисной, необходимо и достаточно, чтобы существовало число  $\delta > 0$  такое, что при всех  $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(L_n, L^n) \geq \delta > 0,$$

где  $L_n = L(\{h_k\}_{k=1}^n)$ ,  $L^n = L(\{h_k\}_{k=n+1}^{\infty})$ ,  $L(M)$  – замкнутая линейная оболочка множества  $M \subset H$ .

В данной работе строится полная система линейно-независимых элементов  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\|g_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  гильбертова пространства  $H$ , обладающая свойством  $(g_i, g_j) \geq \eta \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ , для некоторого числа  $\eta$ ,  $0 < \eta < 1$ . Доказывается, что данная последовательность не удовлетворяет условиям Теоремы 1, следовательно, не является базисной последовательностью в  $H$ .

Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству всех суммируемых в квадрате последовательностей  $l_2$ , то рассматриваем такую последовательность в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Норма и скалярное произведение в данном пространстве задаются следующими формулами:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2}, \text{ для любого } x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) \in l_2;$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) \overline{y(i)}, \text{ для любых } x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) \in l_2, y = (y(1), y(2), \dots, y(n), \dots) \in l_2$$

(черта обозначает комплексное сопряжение).

*Теорема 2.* Пусть  $H$  – гильбертово пространство,  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  – полная последовательность линейно-независимых элементов пространства  $H$ , удовлетворяющая условиям:

- a)  $\|g_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  
 б)  $(g_i, g_j) \geq \eta \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, 0 < \eta < 1$ .

Тогда последовательность  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  не является базисной в пространстве  $H$ .

### Структура блоков Жордана образов длинных корневых элементов в модулярных представлениях групп типов $B_n$ и $F_4$

**Величко Марина Владимировна**

*преподаватель, кандидат физико-математических наук*

*Белорусский государственный педагогический университет им.Танка, Минск, Беларусь*

*E-mail: [mar\\_vel@rambler.ru](mailto:mar_vel@rambler.ru)*

Для нечетного  $p$  описывается структура блоков Жордана образов длинных корневых элементов в модулярных неприводимых представлениях группы типа  $B_n$  при  $n > 2$  и образов таких элементов в неприводимых  $p$ -ограниченных представлениях группы типа  $F_4$  со старшими весами  $m_1\omega_1 + \dots + m_4\omega_4$  при  $m_3 < p-1$ . Оказалось, что для рассматриваемых представлений этих групп образы длинных корневых элементов имеют блоки всех  $a$   $\text{pr}$   $0 \leq a < p$  возможных размерностей. Ранее аналогичная задача была решена автором для представлений простых алгебраических групп в случаях, когда  $\alpha$  – длинный корень (и группа одного из типов  $A_n, B_n, D_n, E_n, n > 2$ , или типа  $C_n, n > 2$ , при  $m_{n-1} < p-1$ ) либо короткий корень (и группа типа  $C_n, n > 2$ ) [5].

Обозначим через  $\mathbb{N}$  множество натуральных чисел и для чисел  $a, b \in \mathbb{N}, a \leq b$ , положим  $\mathbb{N}_a^b = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\}$ . Пусть  $K$  – алгебраически замкнутое поле характеристики  $p > 2$ ,  $G = B_n(K)$  или  $G = F_4(K)$ . Для элемента  $u$  и рационального представления  $\varphi$  группы  $G$  обозначим символом  $J_\varphi(u)$  множество размерностей блоков (без их кратностей) в жордановой нормальной форме элемента  $\varphi(u)$ . Далее  $\alpha_m$  – максимальный корень группы  $G$ . Если  $\omega$  – старший вес представления  $\varphi$  группы  $G$ , то положим  $m(\varphi, u) = \min(\langle \omega, \alpha_m \rangle + 1, p)$ . Напомним, что неприводимое представление со старшим весом  $\omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$  называется  $p$ -ограниченным, если все  $m_i < p$ .

**Теорема.** Пусть  $G = B_n(K), n > 2$ ,  $\varphi$  – неприводимое  $p$ -ограниченное представление группы  $G$  со старшим весом  $\omega = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n$ , и  $\varphi$  не является представлением Стейнберга. Тогда для длинного корневого элемента  $u \in G$  множество  $J_\varphi(u) = \mathbb{N}_1^{m(\varphi, u)}$ .

В случае  $n = 3$  теорема следует из [1, предложение 1], [2, теорема 2 и лемма 12], [3, теорема I.5] и [5, лемма 7]. При  $n > 3$  теорема вытекает из [4] и [6, предложение 1], если  $m_{n-1} = p-1$ , и из [6, следствие 1] в других случаях.

**Предложение.** Пусть  $G = F_4(K), n > 2$ ,  $\varphi$  – неприводимое  $p$ -ограниченное представление группы  $G$  со старшим весом  $\omega = m_1\omega_1 + \dots + m_4\omega_4$ . Если  $m_4 < p-1$ , то  $J_\varphi(u) = \mathbb{N}_1^{m(\varphi, u)}$  для длинного корневого элемента  $u \in G$ .

При  $m_{n-1} + m_n < p-1$  предложение содержится в [2, теорема 2] и [3, теорема I.5]. При  $m_{n-1} + m_n > p-2$  доказательство аналогично доказательству теоремы в случае  $n = 3$ .

## Об автоматной модели преследования в базовых плоских лабиринтах

**Волков Николай Юрьевич**

*младший научный сотрудник*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: [volkov-n-y@rambler.ru](mailto:volkov-n-y@rambler.ru)*

Изучается процесс преследования коллективом автоматов («хищников») нескольких независимых друг от друга автоматов («жертв»). Преследование происходит в плоских областях (лабиринтах) следующих типов: полуплоскость, полоса ширины  $l$ , полуполоса ширины  $l$ , квадрант и квадрат со стороной  $l$ .

Показано, что для каждого из первых трех типов лабиринтов существует конечный коллектив хищников, который в любом лабиринте данного типа «ловит» любую конечную независимую систему жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, при любом начальном расположении жертв и стартующих из одной точки хищников.

Это же утверждение верно для лабиринта, представляющего собой квадрант, если скорость хищников превосходит скорость жертв более чем в 3 раза.

Однако, этот результат не имеет место для лабиринтов типа квадрат. Показано, что для произвольного конечного коллектива хищников существует натуральное число  $l$ , такое, что для произвольного начального расположения хищников в квадрате со стороной  $l$  существует независимая система жертв, таких, что их скорость меньше скорости хищников, и их обзор не больше обзора хищников, и их начальное расположение в квадрате со стороной  $l$ , при котором все жертвы «убегают» от хищников.

В то же время показано, что для произвольной конечной независимой системы жертв существует конечный коллектив хищников, который при любом натуральном  $l$  «ловит» данную систему жертв в квадрате со стороной  $l$  при любом начальном расположении в квадрате жертв и стартующих из одной точки хищников.

## О восстановлении разбиения безопасности

**Галатенко Алексей Владимирович**

*младший научный сотрудник*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: [agalat@msu.ru](mailto:agalat@msu.ru)*

В работе [1] для конечных автоматов с множеством состояний, разбитым на два непересекающихся подмножества, называемых безопасными и небезопасными состояниями, вводится понятие безопасного языка и  $\epsilon$ -безопасного языка для произвольного рационального  $\epsilon$  из отрезка  $[0;1]$ . Исследуем задачу восстановления разбиения множества состояний и значения  $\epsilon$  с помощью кратного условного эксперимента с оракулом, по произвольному входному слову выдающим, принадлежит ли слово задаваемому автоматом языку.

В случае безопасных языков стандартным образом (см., например, [2]) вводим функции Шеннона длины  $(L(n))$  и объема эксперимента  $(LL(n))$  для автоматов с  $n$  состояниями. Справедливы следующие оценки.

**Теорема 1.** Если мощность входного алфавита неограниченна, то  $L(n) = n - 1$ ;  $LL(n) = n^2/4$  при четных  $n$ ,  $LL(n) = (n - 1)^2/4$  при нечетных  $n$ . Если мощность входного алфавита равна  $k > 0$ , то  $L(n) = (n - 1) - \lfloor (n - 2)/k \rfloor$ ;  $n^2/6 \leq LL(n) \leq n^2/4$ .

В случае  $\varepsilon$ -безопасных языков рассмотрим более слабую задачу восстановления значения  $\varepsilon$  с точностью до эквивалентности задаваемых языков при известном разбиении множества автоматов. Для произвольного конечного входного слова  $\alpha$  рассмотрим долю  $\rho_\alpha$  небезопасных состояний, в которые переходил автомат при подаче на вход  $\alpha$ . Рассмотрим множество  $P$ , являющееся объединением  $\rho_\alpha$  по всем конечным входным словам. Назовем спектром множество рациональных точек прикосновения  $P$ . Спектр автомата может быть описан конструктивно, в терминах строения диаграммы Мура. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если  $\varepsilon$  принадлежит спектру и не равно 1, задача восстановления значения  $\varepsilon$  алгоритмически неразрешима.

### Свойство ядра резольвенты для оператора Шрёдингера

*Галимов Артур Нилович*

*ассистент, аспирант*

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия*

*E-mail: [arturgalimov@rambler.ru](mailto:arturgalimov@rambler.ru)*

В пространстве  $L^2(R^3)$  рассматривается оператор Шрёдингера в магнитном поле

$$H(a, V) = \sum_{k=1}^3 (p_k + a_k)^2 dx < \infty,$$

где  $p_k = i^{-1} \partial / \partial x_k$ ,  $a(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$  и  $V$  - соответственно магнитный и электрический потенциалы, причем  $a_k(x)$  ( $k=1,2,3$ ) и  $V(x)$  - вещественные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

(i)  $\Phi(x)$  удовлетворяет одному из условий:

а)  $|\Phi(x)| \in L(R^3)$ , где  $\Phi(x) = V(x) + a^2(x) + i \operatorname{div} a(x)$ ,  $a^2(x) = \sum_{k=1}^3 a_k^2(x)$ ;

б) при некотором  $\varepsilon > 0$

$$(1 + |x|)^{1+\varepsilon} |\Phi(x)|^2 \in L(R^3);$$

(ii)  $a(x)$  удовлетворяет одному из условий:

а)  $|a(x)| \in L(R^3)$ ;

б) при некотором  $\varepsilon > 0$

$$(1 + |x|)^{1+\varepsilon} |a(x)|^2 \in L(R^3);$$

(iii) для всех  $\delta > 0$  функции

$$f_\delta(x) = \int_{|x-y| \leq \delta} |x-y|^{-1} |\Phi(y)| dy, \quad g_\delta(x) = \int_{|x-y| \leq \delta} |x-y|^{-2} |a(y)| dy,$$

ограничены в  $R^3$ , причем  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup_x f_\delta(x)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sup_x g_\delta(x)) = 0$ .

Рассмотрим операторы  $R_\circ(\lambda) = (H_\circ - z)^{-1}$  и  $R(\lambda) = (H - z)^{-1}$  с соответствующими ядрами  $R_\circ(x, y, \lambda)$  и  $R(x, y, \lambda)$ . Ядро  $R_\circ(x, y, \lambda) = \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ , а  $R(x, y, \lambda)$  выражается из уравнения

$$R(x, y, \lambda) + \int_{R^3} \frac{e^{i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} W_s R(s, y, \lambda) ds = \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

где  $W = 2 \sum_{k=1}^3 p_k a_k + \Phi$ .

Мы изучаем свойство ядра  $R(x, y, \lambda)$  в окрестности особенностей, расположенных на непрерывном спектре. Эти особенности определены в работе [1].

### **Математико-компьютерная модель самоочищения легких человека.**

***Гераськина Юлия Геннадьевна***

*аспирантка*

*Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: ger\_julia@mail.ru*

Одним из важнейших органов жизнедеятельности человека являются легкие, главной функцией которых является газообмен. Легкие выполняют также и другие важные для организма функции, такие как иммунная защита, терморегуляция, самоочищение и другие.

Уже созданы математические модели почек, сердца, нервной системы, но разработка математической модели легких только началась. Она находится в стадии построения моделей отдельных функций легких, сращивание которых в последующем должно привести к построению общей модели легких.

В докладе будет рассказано о математико-компьютерной модели функции самоочищения легких от веществ, поступающих в них из окружающей среды, а также от веществ, образующихся в легких в процессе их жизнедеятельности. Рассматриваются случаи здоровых легких, функционирующих в чистой и загрязненной средах, а также случаи легких с патологиями в таких средах.

В случае чистой среды найдено минимально достаточное время для полного самоочищения здоровых легких при заданной массе загрязняющих веществ в них. Решение этой проблемы распалось на пять качественно различных случаев, в каждом из которых найдено указанное время, то есть, так называемая, функция Шеннона.

В случае загрязненной среды описаны все допустимые по концентрации загрязняющих веществ среды, в которых легкие могут нормально функционировать, оставаясь при этом здоровыми.

Для случая легких с патологиями найден алгоритм сведения таких легких к виртуальным здоровым легким, но с более слабыми параметрами. Тем самым, для легких с патологиями решены задача нахождения минимально достаточного времени для их полного самоочищения при заданной массе загрязняющих веществ в них, а также задача описания допустимых по концентрации загрязняющих веществ сред, в которых легкие с патологиями могут нормально функционировать.

Автор благодарит академиков В.Б.Кудрявцева и А.Г.Чучалина за научное руководство.

## Об одном бикompактном расширении счетного дискретного пространства

Головастов Роман Александрович

магистр

Удмуртский Государственный Университет, Мат. Факультет, Ижевск, Россия

E-mail: rpa4@bk.ru

В работе рассматривается бикompактное расширение дискретного пространства, построенное М.Беллом.[1]

Пусть  $P = \{f \in \omega^\omega : 0 \leq f(n) \leq n+1 \text{ для } n < \omega\}$ ,  $N = \{f|_n : f \in P, n < \omega\}$  - множество всех сужений отображения  $f \in P$  на  $n \in \omega$ . Пусть  $T = \{\pi \in N^\omega : \text{dom}(\pi(n)) = n+1 \text{ для всех } n < \omega\}$ . Для каждого  $s \in N$ , положим,  $C_s = \{t \in N : t \text{ есть продолжение } s\}$ . Для  $\pi \in T$  положим  $C_\pi = \bigcup \{C_{\pi(n)} : n < \omega\}$ .  $B$  - нормальная база, порожденная бесконечными множествами из  $B' = \{C_\pi : \pi \in T\} \cup \{N \setminus C_\pi : \pi \in T\}$ . Строится  $BN$ , как волмэновское расширение  $N$  по базе  $B$ .

Основными свойствами этого расширения, полученные М.Беллом, являются:

- $BN$  - бикompактное расширение счетного дискретного пространства;
- $N^* = BN \setminus N$  - обладает счетным числом Суслина;
- $N^* = BN \setminus N$  - не сепарабелен.

Последние два свойства существенно отличают расширение  $BN$  от известного стоун-чеховского расширения  $\beta N$ . Однако, оказывается что в  $BN$  существует подмножество гомеоморфное  $\beta N$ . А именно справедлива следующая теорема:

**Теорема.**  $\{C_{S_i}\}_{i \in \omega}$  - дизъюнктивная система:  $\text{dom}(s_i) \neq \text{dom}(s_j), \forall i \neq j$  и  $X = \{x_i\}_{i \in \omega} : x_i \in [C_{S_i}]$ . Тогда  $[\bigcup \{x_i\}]$  гомеоморфно  $\beta N$  и нигде не плотно в  $N^* = BN \setminus N$ .

Отсюда непосредственно следует ряд свойств пространства  $BN$ : мощность пространства равна  $2^c$ , а вес, теснота и спрэд равны  $2^\omega$ .

**Теорема.**  $\{C_{S_i}\}_{i \in \omega}$  - дизъюнктивная система,  $C_{S_i}^* = [C_{S_i}] \setminus C_{S_i}$  - след множества в наросте.  $X = \{x_i\}_{i \in \omega} : x_i \in C_{S_i}^*$ . Тогда  $[\bigcup \{x_i\}]$  гомеоморфно  $\beta N$ .

**Предложение.**  $\{s_i\}_{i \in \omega} : s_i \in T, \text{dom}(s_i) \neq \text{dom}(s_j)$  и  $s_i$  не является продолжением  $s_j, \forall i \neq j$ . Тогда  $[\bigcup \{s_i\}]$  гомеоморфно  $\beta N$ .

## Об особенностях сходимости алгоритма ISRA

Гуцин Роман Андреевич

Студент 5 курса

МГУ им. М. В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики

[guroan@gmail.com](mailto:guroan@gmail.com)

Данная работа посвящена изучению особенностей сходимости алгоритма ISRA (Image Space Restoration Algorithm) на примере задачи повышения разрешения радиографических изображений. Данный алгоритм представляет собой нелинейный итерационный алгоритм для решения интегральных уравнений 1-го рода. Он активно применяется в задачах восстановления и улучшения качества цифровых изображений.

На модельных данных экспериментально исследована степень близости восстанавливаемого изображения к оригиналу при различных степенях зашумленности входных данных. Установлено, что если при отсутствии шума алгоритм ISRA имеет монотонную сходимость, то внесение даже небольшого шума приводит к расходимости алгоритма, начиная с некоторой итерации. Выявлена проблема выбора критерия для остановки работы алгоритма.

Для случая кусочно-постоянных входных данных предложено решение проблемы останковки алгоритма путем использования пороговой фильтрации данных. Произведено сравнение различных стратегий применений фильтрации и осуществлен выбор оптимальной. При этом достигается значительное улучшение качества восстанавливаемого изображения.

Данный алгоритм применяется при обработке экспериментальных данных, получаемых на установке, созданной в Центре магнитной томографии и спектроскопии МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Асимптотика собственных значений краевой задачи Дирихле оператора Ламэ в трехмерной области с малой полостью**

**Давлетов Дмитрий Борисович**

*Аспирант*

*Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы*

*E-mail: [davletovdb@mail.ru](mailto:davletovdb@mail.ru)*

Пусть  $\Omega$  и  $\omega$  - ограниченные области в  $\mathbf{R}^3$  с бесконечно дифференцируемыми границами  $\Gamma := \partial\Omega$  и  $\gamma := \partial\omega$ ,  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3)^t$  ( $t$  - знак транспонирования),  $0 < \varepsilon \ll 1$  - малый параметр. Не ограничивая общности предполагается, что начало координат лежит в  $\Omega$  и  $\omega$ . Обозначим  $\omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} : \mathbf{x}\varepsilon^{-1} \in \omega\}$ ,  $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$ ,  $\gamma_\varepsilon := \partial\omega_\varepsilon$ ,  $\Gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon$ . Вектор смещений  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  понимается как столбец  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) := (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}), z_3(\mathbf{x}))^t$ . Под  $\Delta^*$  будем понимать оператор Ламэ:

$$\Delta^* := \Delta + \alpha \nabla \operatorname{div},$$

где  $\alpha := \frac{\lambda + \mu}{\mu}$ ,  $\lambda, \mu > 0$  - постоянные Ламэ.

В данной работе рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения в области с малой полостью:

$$-\Delta^* \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \lambda_\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1)$$

где  $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x})$  - трехмерная вектор-функция с компонентами, определенными на  $\Omega_\varepsilon$ .

Предельной для (1) назовем краевую задачу:

$$-\Delta^* \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) = \lambda_0 \mathbf{z}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{z}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где  $\mathbf{z}_0(\mathbf{x})$  - нормированная в  $(L_2(\Omega))^3$  собственная вектор-функция.

Используя метод согласования асимптотических разложений, строятся первые члены асимптотик собственных элементов возмущенной краевой задачи (1). Построение асимптотики проводится по малому параметру  $\varepsilon$  - диаметру малой полости.

Показано, что асимптотика собственного значения  $\lambda_\varepsilon$  краевой задачи (1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет вид:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \mathbf{z}_0^t(\mathbf{0}) C(\omega, \alpha) \mathbf{z}_0(\mathbf{0}),$$

а  $C(\omega, \alpha)$  - положительно определенная матрица, зависящая от геометрии области  $\omega$  и постоянных Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ .

Ключевые слова: оператор Ламэ, собственное значение и собственная вектор-функция, сингулярное возмущение, асимптотика.

## Задача об описании решеток гиперграфов

**Демёхин Евгений Евгеньевич**

студент

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-Математический Факультет, Москва, Россия*

*E-mail: [edemekhin@gmail.com](mailto:edemekhin@gmail.com)*

**Kreindler, Gabriel**

undergraduate student

*Princeton University, Mathematics Department, Princeton, NJ, USA*

Представленная работа посвящена проблеме описания гиперграфов и их решёток. В теории графов известны теоремы Эрдёша о графах и построенных на их базе решётках (см., например, [2]). Целью авторов настоящего исследования было попытаться расширить эти теоремы для гиперграфов.

В частности, в данной работе описаны с помощью алгебраических формул целочисленные решётки тесно соединённых гиперграфов, что соответствует частному случаю для обычных графов, который был разобран Эрдёшем. Кроме того, авторами данной работы обобщено понятие порядковой последовательности для гиперграфов. Особое внимание уделено задаче о насыщении решётки гиперграфа и рассмотрению так называемых "дыр": элементов, входящих в насыщение, но не входящих в целочисленную решётку графа [4]. Авторами показывается на основе контрпримеров, что сдвинутые гиперграфы 3-его и выше порядков и гиперграфы с ограниченным диаметром не являются нормальными. Ранее этот факт был доказан Донгом, но только для гиперграфов 4-ого порядка [1]. И наконец, в представленной работе показано, какой вид имеют факторгруппы различных решёток по целочисленным решёткам графов.

## Динамика рыболовной сети

**Ермакова Татьяна Владимировна, Недоступ Александр Алексеевич**

к.т.н., доцент, к.т.н., доцент

*Калининградский государственный технический университет, Калининград, Россия*

*E-mail: [nedostup@klgtu.ru](mailto:nedostup@klgtu.ru), [anedostup@yahoo.com](mailto:anedostup@yahoo.com)*

Для повышения эффективности проектирования и эксплуатации рыболовных сетей требуется теория, позволяющая исследовать их динамические режимы работы. В настоящее время данной проблеме уделяется большое внимание за рубежом [3]. В данной работе рассматривается динамика движения множества ниток и узлов, из которых изготовлена рыболовная сеть, при условии, что коэффициент сопротивления ниток меняется только с изменением угла ориентации к потоку. Такое упрощение в математических моделях вызывает, в конечном счете, большую ошибку.

Данная работа является продолжением работы [2] и посвящена динамике погружения (всплытия) и перемещения рыболовной сети. Сформулируем основное предположение, положенное в основу вывода уравнений динамики погружения (всплытия) рыболовной донной ставной сети (далее ССД) - ССД является плоской кривой. В общем случае скорость погружения (всплытия)  $v_y$  и скорость перемещения  $v_x$  изменяются во времени  $t$ . На основании ранее выполненных исследований [2] были получены уравнения динамики ССД:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} - (e^{\chi} - 1) \frac{dl}{dt} &= le^{\chi} \frac{d\chi}{dt} \\ dv_y &= -\chi dv_x \\ dl / dt &= v_x \\ dh / dt &= v_y \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где,  $\chi$  - безразмерная сила, зависящая от времени  $t$ , [2];  $l$  - горизонтальная проекция высоты сети, [2];  $h$  - вертикальная проекция высоты сети, [2].

К системе (1) было добавлено продифференцированное по времени  $t$  соотношение, определяющее величину  $\chi$ , [2]. Из полученной таким образом системы обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами определялись  $v_y$ ,  $v_x$  и  $\chi$ , как функции времени  $t$ , [1]. Таким образом, были получены зависимости, связывающие скоростные параметры рыболовной сети  $v_y$ ,  $v_x$  с временем  $t$  погружения (всплытия) и перемещения сети.

В последствии система уравнений (1) будет использована для решения задач нестационарного движения закидного невода, погружения (всплытия) ставного подвесного невода, погружения (всплытия) разноглубинной сети, а так же решения проблем управления орудиями рыболовства.

**Асимптотическая формула для средней длины  
приведенной регулярной непрерывной дроби.**

**Жабицкая Елена Николаевна**

*студентка*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*Приведенной регулярной непрерывной дробью* называется выражение вида

$$[[t_0; t_1, t_2, \dots, t_l]] = t_0 - \frac{1}{t_1 - \frac{1}{t_2 - \dots - \frac{1}{t_l}}},$$

где все  $t_n$  — натуральные,  $t_n \geq 2$  при  $n \geq 1$ . Всякое рациональное число  $r$  единственным образом представляется в виде приведенной регулярной непрерывной дроби. Обозначим длину  $l$  дроби  $[[t_0; t_1, t_2, \dots, t_l]]$ , представляющей число  $r$ , через  $l(r)$ .

В данной работе получена трехчленная асимптотика со степенным понижением в остаточном члене для средней длины приведенной регулярной непрерывной дроби числа  $a/b$ , где  $a, b \in N$ ,  $a \leq b \leq R$ ,  $R$  — действительное число, большее 2. Обозначим

$$N(R) = \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} l(a/b), \quad E(R) = \frac{2N(R)}{[R]([R]+1)}.$$

**Теорема 1. (Основной результат)** Для действительного  $R \rightarrow \infty$  справедлива следующая асимптотическая формула

$$\begin{aligned} E(R) = & \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + \frac{1}{\zeta(2)} \left( 2\gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \log R + \\ & + \frac{1}{\zeta(2)} \left( 2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left( 2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^2(2)} \right) + \\ & + O(R^{-1} \log^5 R), \end{aligned}$$

где  $\zeta(s)$  — Дзета-функция Римана,  $\gamma$  — константа Эйлера.

Можно также рассматривать сумму длин только по взаимно простым числам  $a, b$ . Тогда каждая приведенная регулярная непрерывная дробь рационального числа не превосходящего 1 со знаменателем не превосходящим  $R$  будет учтена ровно один раз.

В обозначениях  $N^*(R) = \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} l(a/b)$ ,  $E(R) = \frac{2\zeta(2)N^*(R)}{[R]([R]+1)}$  сформулируем

**Следствие 1.** Для действительного  $R \rightarrow \infty$  справедлива следующая асимптотическая формула

$$\begin{aligned}
E^*(R) &= \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + \frac{1}{\zeta(2)} \left( 2\gamma - \frac{3}{2} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \log R + \\
&+ \frac{1}{\zeta(2)} \left( 2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left( 2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{3(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^2(2)} \right) + \\
&+ O(R^{-1} \log^6 R).
\end{aligned} \tag{1}$$

Величину  $l(a/b)$  можно рассматривать как число шагов алгоритме Евклида с “делением по избытку”. Таким образом, величина  $E(R)$  является математическим ожиданием числа шагов алгоритма Евклида с “делением по избытку”, примененного к числам  $a$  и  $b$ , меняющимся в пределах  $1 \leq a \leq b \leq R$ ,  $R \rightarrow \infty$ .

В 2003 году Валлее (Vallee B.), исследуя статистические свойства различных видов алгоритмов Евклида в работе "A Unifying Framework for the Analysis of Class of Euclidean Algorithms" с использованием вероятностных и эргодических методов, получила, в частности, главный член асимптотической формулы для математического ожидания числа шагов алгоритма Евклида с “делением по избытку”, а следовательно, и для средней длины приведенной регулярной непрерывной дроби.

В данной работе использовался метод, предложенный А.В.Устиновым, посредством которого задача сводится к нахождению числа целочисленных решений системы неравенств. С помощью этого метода был получен более сильный результат, чем у Валлее. Результат был подтвержден численной проверкой.

### **О проблеме полноты в классе автоматов без обратной связи.**

***Жук Дмитрий Николаевич, Присмотров Юрий Николаевич***

*аспирант, аспирант*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: zh\_dmitriy@mail.ru*

В 1964 г. Кратко М.И. установил алгоритмическую неразрешимость задачи о полноте относительно операций суперпозиции и обратной связи для конечных систем автоматных функций. Бабин Д.Н. показал, что для систем автоматов, содержащих все булевы функции, указанная задача алгоритмически разрешима. Буевичем В.А. было доказано, что в классе автоматов без обратной связи задача о полноте алгоритмически неразрешима. Возникает задача о полноте относительно операции суперпозиции для систем автоматов без обратной связи, содержащих все булевы функции.

Рассмотрим конечные автоматы, получающиеся при помощи операции суперпозиции из элементов, являющихся булевыми функциями или единичными задержками с начальными состояниями 0 или 1. Автоматы такого вида будем называть автоматами без обратной связи.

Рассматриваются системы вида  $P_2 \cup \nu$ , где  $P_2$  - множество всех булевых функций как автоматов. Эффективно описаны три счётных и два конечных семейства предполных классов, с помощью которых был построен алгоритм проверки на полноту указанных систем автоматов. Для каждого конечного множества  $\nu$  эффективно выделяется конечная система классов из указанных семейств предполных классов, по которым принимается решение о полноте рассматриваемой системы: она полна точно тогда, когда не содержится ни в одном из классов указанного конечного множества предполных классов.

**Численный алгоритм определения углов между устойчивыми и неустойчивыми подпространствами аттракторов динамических систем**

*Захарова Лидия Александровна*

*студент*

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,*

*математический факультет, Ярославль, Россия*

*E-mail: [Lida\\_Z@rambler.ru](mailto:Lida_Z@rambler.ru)*

Рассматривается автономная динамическая система вида:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad (1)$$

где  $x(t): R \rightarrow R^m$  - вектор-функция,  $F(x): R^m \rightarrow R^m$ . Предполагается, что система (1) обладает хаотическим в смысле Девани (Devaney) аттрактором. Одним из наиболее важных свойств хаотического аттрактора является положительность его старшего ляпуновского показателя. Для определения устойчивых и неустойчивых подпространств аттрактора системы (1) с помощью алгоритма Бенеттина вычисляются показатели Ляпунова  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$ , заданные в порядке возрастания. Для этого решается исходная система с начальными условиями, выбранными на аттракторе, совместно с уравнениями в вариациях, которые описывают эволюцию бесконечно малого шара фазового пространства вдоль этой траектории.

Пусть  $E^+$  - неустойчивое инвариантное подпространство, образуемое векторами  $u_1, u_2, \dots, u_k$ , соответствующими положительным ляпуновским показателям. Аналогично, пусть  $E^-$  - устойчивое инвариантное подпространство, образуемое векторами  $v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, v_n$ , соответствующими отрицательным показателям. Отметим, что в ситуации общности положения, гладкая автономная система (1) имеет единственный нулевой показатель, которому соответствует одномерное нейтральное подпространство  $E^0$ . Определение угла между инвариантными подпространствами является прямой численной проверкой условия квазигиперболичности аттракторов динамической системы. При проведении численного эксперимента оценивается функция распределения углов между подпространствами  $E^+$  и  $E^-$ , а также между подпространствами  $E^+ \oplus E^-$  и  $E^0$ . И в случае, если это распределение отделено от нуля, можно сделать обоснованное предположение о гиперболичности аттрактора.

Процедура определения углов состоит в вычислении векторов малых возмущений вдоль траектории в прямом и обратном времени с измерением угла между этими векторами в точках траектории:

$$\alpha(E^+, E^-) = \min_{\substack{u_i \in E^+ \\ v_j \in E^- \\ \|u_i\| = \|v_j\| = 1}} \alpha(u_i, v_j) = \min_{\substack{u_i \in E^+ \\ v_j \in E^- \\ \|u_i\| = \|v_j\| = 1}} [\arccos(u_i, v_j)] = \min_{\substack{u_i \in E^+ \\ \|u_i\| = 1}} \left[ \arccos \frac{(v_i^*, u_i)}{\|v_i^*\|} \right] = \arccos \left[ \max_{\substack{u_i \in E^+ \\ \|u_i\| = 1}} \frac{(v_i^*, u_i)}{\|v_i^*\|} \right], \Gamma$$

$$\text{де } v_i^* = \sum_{j=k+2}^n (u_i, v_j) \cdot v_j, \quad i = 1..k, j = k + 2..n. \quad (2)$$

Предложен эффективный алгоритм построения гистограммы распределения углов (2). Этот метод был применен для подтверждения квазигиперболичности аттрактора Лоренца, негиперболичности аттрактора Ресслера и гиперболичности аттрактора системы Кузнецова на основе связанных генераторов Ван-дер-Поля

**О решении задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа**

**Захарова Ольга Владимировна**

аспирант

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

E-mail: [dear\\_hunny@mail.ru](mailto:dear_hunny@mail.ru)

Рассматривается задача Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа

$$u''_{tt}(t, x) = Au(t, x) + B(t, x, W(t)) W'_t(t), \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u'_t(t, x)|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

где  $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  - эллиптический оператор второго порядка с

предсказуемыми коэффициентами  $a_{ij}(t, x)$ ,  $d_i(t, x)$ ;  $W(s)$  - одномерный винеровский процесс, формальная производная винеровского процесса  $W'_t(t)$  понимается в смысле Стратоновича, а само уравнение - в интегральной форме. Задача Коши (1) в различных формах рассматривалась многими авторами, в частности, в работах [1], [2].

В настоящей работе предлагается искать решение задачи (1) в виде

$$u(t, x) = \int_0^t \phi(s, x, W(s)) ds,$$

где  $\phi(s, x, y)$  - неизвестная случайная функция, гладкая по всем своим аргументам.

Используя подход, предложенный в работе [3], удалось показать, что решение задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа вида (1) находится из цепочки уравнений

$$\phi'_y(t, x, y) = B(t, x, y), \quad \phi''_{ss}(s, x, y)|_{y=W(s)} = A\phi(s, x, W(s)) \quad (2)$$

с начальными условиями  $\phi(0, x, W(0)) = u_0(x)$ ,  $\phi'_t(t, x, y)|_{t=0, y=W(0)} = v_0(x)$ .

Интегрируя первое уравнение цепочки (2), находим  $\phi(s, x, z) = F(s, x, z) + c(s, x)$ , где

$F(s, x, z) = \int B(s, x, z) dz$ , а  $c(t, x)$  - неизвестная функция. Подставляя это соотношение во второе уравнение цепочки (2), получаем уравнение на функцию  $c(s, x)$

$$c''_{ss}(s, x) - Ac(s, x) = AF(s, x, W(s)) - F''_{ss}(s, x, z)|_{z=W(s)} \quad \text{с начальными условиями}$$

$$c(0, x) = u_0(x) - F(0, x, W(0)), \quad c'_s(t, x)|_{t=0} = v_0(x) - F'_s(0, x, W(0)).$$

**Поляризации и размерности орбит,  
ассоциированных с инволюциями в группах Вейля типов  $B_n$  и  $D_n$**

**Игнатъев Михаил Викторович**

аспирант

Самарский государственный университет, Самара, Россия

[mihail\\_ignatev@mail.ru](mailto:mihail_ignatev@mail.ru)

Пусть  $k = \mathbf{F}_q$  - конечное поле характеристики  $p$ ,  $\mathbf{u}$  - алгебра всех строго нижнетреугольных матриц с элементами из поля  $k$  размера  $m \times m$ ,  $m \geq 3$ , с нулями на главной диагонали, кососимметричных относительно побочной диагонали; мы предполагаем, что  $p \geq m$ . Тогда  $U = \exp(\mathbf{u})$  - максимальная унипотентная подгруппа в классической конечной группе типа  $B_n$  или  $D_n$  при нечётных и чётных  $m$  соответственно.

Согласно методу орбит А.А. Кириллова [6], [4], адаптированному для конечных групп Д. Кажданом [2] (см. также [5]), неприводимые конечномерные комплексные

представления  $U$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с коприсоединёнными орбитами группы  $U$  в  $\mathfrak{u}^*$ . Полная классификация орбит для произвольного  $n$  неизвестна и представляется очень трудной задачей; в то же время, отдельные серии орбит допускают полное описание (см., например, [1]). Для явного построения представления, соответствующего данной орбите  $\Omega$ , большое значение имеют поляризации – максимальные  $f$ -изотропные подпространства, где  $f$  – произвольная точка на орбите  $\Omega$  (подробнее см. [2]), причём размерность представления равна  $q^{\dim(\Omega)/2}$ .

С каждой инволюцией  $\sigma$  в группе Вейля  $W$  можно некоторым образом связать коприсоединённую орбиту (точнее, целое семейство орбит)  $\Omega_\sigma$ . В статье [7] А.Н. Пановым дано явное описание таких орбит и их поляризаций, а также получена формула для размерности, в случае  $A_n$ . Мы строим поляризации для орбит в случаях  $B_n$  и  $D_n$ . В качестве следствия мы описываем размерность орбиты во «внутренних» терминах группы Вейля  $W$ , для инволюций, допускающих *однозначное* представление в виду произведения попарно коммутирующих отражений. Оказывается, что  $\dim \Omega_\sigma = l(\sigma) - s(\sigma) - d(\sigma)$ , где  $l(\sigma)$  и  $s(\sigma)$  – количество элементов в максимально возможном представлении  $\sigma$  в виде произведения отражений относительно гиперплоскостей, ортогональных простым и произвольным корням соответственно, а  $d(\sigma)$  – некоторый «дефект», зависящий только от самой инволюции  $\sigma$ .

Основным инструментом при построении поляризаций является специфическая процедура, которая с каждой инволюцией связывает некую диаграмму – квадратную табличку размера  $m \times m$  (способ её построения см. в [7]). Подобные диаграммы также играют ключевую роль при описании всех орбит в случае унитарной группы (то есть в случае  $A_n$ ) при  $n \leq 7$  (см. [3]).

### **О решении одного класса одномерных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с возмущенными коэффициентами**

*Исмагилов Нияз Салаватович*

*студент*

*Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия.*

*E-mail: niyaz.ismagilov@mail.ru*

Рассматривается решение задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с одномерным винеровским процессом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_1(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A_2(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + A_3(x,t)u(x,t) + A_4, \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

где  $A_k(x,t) = a_k(x,t, w(t)) \operatorname{sgn}(w(t))w'(t) + b_k(x,t, w(t))$ ,  $w(t)$  – одномерный винеровский процесс, а ее производная  $w'(t)$  понимается в смысле Стратоновича. Различные варианты уравнения вида (1) рассматриваются, например, в книге Розовского [3] и сборнике статей Da Prato [1].

В работе показано, что при определенных условиях, накладываемых на коэффициенты, решение задачи Коши для уравнения (1) существует, но, вообще говоря, не единственно. Частное решение задачи Коши для уравнения (1) может быть найдено в виде

$$u(x,t) = u^*(t,x,w(t)) = \int_{\mathbf{R}} \Gamma(x,w(t); \xi, 0 | t) \psi(\xi, t) d\xi + \int_0^{w(t)} \int_{\mathbf{R}} \Gamma(x,w(t); \xi, \tau | t) a_4(\xi, t, \tau) d\xi d\tau,$$

здесь, при каждом  $t$  функция  $\Gamma(x,w(t); \xi, \tau | t)$  есть фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u^*(x, t, v)}{\partial v} = a_1 \frac{\partial^2 u^*(x, t, v)}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u^*(x, t, v)}{\partial x} + a_3 u^*(x, t, v) + a_4, \quad a_k = a_k(x, t, v),$$

а функция  $\psi(x, t) = u^*(x, t, 0)$  ищется из уравнения

$$\Gamma(x, w(t); \xi, 0 | t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \beta(x, w(t); \xi; t) \psi(x, t) = D(x, w(t); \xi; t),$$

и начального условия  $u(x, 0, 0) = u_0(x)$ , где

$$\beta(x, w(t); \xi; t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial^2 x} - b_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - b_3 \Gamma, \quad \Gamma = \Gamma(x, w(t); \xi, 0 | t),$$

$$D(x, w(t); \xi; t) = \int_0^{w(t)} \left[ \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} a_4 - \bar{\Gamma} \frac{\partial a_4}{\partial t} - b_1 \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}}{\partial^2 x} a_4 - b_1 \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x} a_4 - b_3 \bar{\Gamma} a_4 \right] d\tau + \\ + \alpha(x, t, w(t)) \Gamma(x, w(t); \xi, 0 | t),$$

$$\bar{\Gamma} = \Gamma(x, w(t); \xi, \tau | t), \quad a_4 = a_4(\xi, t, \tau), \quad \alpha(x, t, w(t)) = b_4(x, t, w(t)) / \int_{\mathbf{R}} \Gamma(x, w(t); \xi, 0 | t) d\xi.$$

## Стабилизаторы минимального порядка для линейных векторных динамических систем

**Капалин Иван Владимирович**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

E-mail: [ikapalin@google.com](mailto:ikapalin@google.com)

### Введение

В теории управления задача поиска стабилизатора минимального порядка является классической, в общем случае нерешенной задачей. Актуальность этой задачи состоит в том, что порядок стабилизатора в конечном счете отражает сложность механизма стабилизатора, чем проще он, тем это более надежно и более экономически выгодно.

Стабилизатор позволяет изменять свойство устойчивости какого-либо рассматриваемого объекта, то есть, в частности, делать из неустойчивого устойчивый. Теоретически возможно управлять и неустойчивым объектом, но практически мы сталкиваемся с проблемой ограниченности нашего управления, что накладывает условия ограниченности на поведение самого объекта. Этого можно добиться, сделав систему устойчивой, для чего обычно используют стабилизатор.

Известен способ сведения задачи поиска стабилизатора минимального порядка в случае линейной SISO системы в общем положении к задаче поиска гурвицева полинома в линейном аффинном многообразии. Данная работа посвящена построению обобщения решения этой задачи на случай линейных MIMO систем.

### Математическая постановка задачи

Рассматривается линейная динамическая система вида :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$ ,  
 $A, B, C$  – соответствующих размерностей

Необходимо построить стабилизатор минимального порядка для этой системы.

Дополнительное условие накладываем на систему для простоты рассуждений – тройка  $\{A, B, C\}$  находится в общем положении.

Эта задача сводится [1] в случае  $r = l = 1$  к задаче поиска гурвицева полинома в линейном многообразии вида :

$$\left\{ \begin{array}{l} Hl = h, \\ \text{где } H \in \mathfrak{R}^{2(n-k-1) \times (n+k)}, h \in \mathfrak{R}^{2(n-k-1)} \text{ и зависят} \\ \text{от коэффициентов передаточной функции,} \\ l - \text{неизвестный вектор коэффициентов} \\ \text{гурвицева полинома} \end{array} \right. \quad (2)$$

### Исследование

Классически система стабилизируется с возможностью выбора произвольного спектра, если же опустить это условие, то возможно понижение порядка стабилизатора до минимального. В этом состоит основная идея.

Процесс поиска минимального стабилизатора сводится к поиску минимального  $k$ , при котором система (2) имеет решение.

### Результаты

Задача (1) в случае  $l > 1, r = 1$  сведена к задаче вида :

$$\left\{ \begin{array}{l} Hb = h, \\ \text{где } H \in \mathfrak{R}^{(n+k-m) \times (n+k-1)}, h \in \mathfrak{R}^{(n+k-m) \times 1}, 0 \leq m \leq lk \\ \text{и зависят от коэффициентов полиномов} \\ \text{в матричной передаточной функции,} \\ b - \text{коэффициенты гурвицева полинома} \end{array} \right. \quad (3)$$

В задаче (3) появляется параметр  $m$ , который отвечает рангу матрицы специального вида, построенной из коэффициентов полиномов матричной передаточной функции и зависящей от  $k$ . В случае, когда ранг этой матрицы равен  $n+k$ , этот параметр полагается равным 0.

Теперь чтобы найти минимальный порядок стабилизатора, необходимо найти минимальное  $k$ , при котором система (3) имеет решение. Стоит отметить, что при выводе в данном случае не использовалось условие общего положения тройки  $\{A, B, C\}$ .

Задача поиска устойчивого полинома в линейном аффинном многообразии пока не имеет простого решения уже в случае системы размерности 4. Существуют различные способы сведения этой задачи к задаче поиска глобального минимума, которую можно практически решать с помощью эволюционных методов.

### Некоторые оценки минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями третьего типа

**Карулина Елена Сергеевна**

*Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ), Москва, Россия*

*E-mail: KarulinaES@yandex.ru*

Рассматривается следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $q(x)$  – неотрицательная ограниченная на  $[0, 1]$  функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 q^\gamma(x) dx = 1, \quad \gamma \neq 0. \quad (3)$$

Множество таких функций  $q(x)$  обозначим  $A_\gamma$ .

Под решением задачи (1)-(2) будем понимать функцию  $y(x)$ , которая определена на  $[0,1]$ , удовлетворяет условиям (2), у которой  $y'(x)$  абсолютно непрерывна и уравнение (1) выполняется почти всюду на интервале  $(0,1)$ .

Оценивается минимальное собственное значение  $\lambda_1$  этой задачи при различных значениях  $\gamma$  и  $k$ .

Пусть  $m_\gamma = \inf_{q(x) \in A_\gamma} \lambda_1$ ,  $M_\gamma = \sup_{q(x) \in A_\gamma} \lambda_1$ . Тогда имеют место следующие теоремы:

**Теорема 1.**

1. Если  $0 < \gamma < 1$ , то  $M_\gamma = +\infty$  ;
2. если  $\gamma \geq 1$ , то  $M_\gamma \leq 2k^2 + 1$ .

**Теорема 2.** При всех  $\gamma \neq 0$  :

1. Если  $0 < k^2 < (-1 + \sqrt{3})/2$ , то  $m_\gamma \geq k^2 / (2k^2 + 2)$  ;
2. если  $(-1 + \sqrt{3})/2 \leq k^2 < \pi/2$ , то  $m_\gamma > k^4$  ;
3. если  $k^2 = \pi/2$ , то  $m_\gamma \geq \pi^2/4$  и если  $k^2 > \pi/2$ , то  $m_\gamma > \pi^2/4$  ;

Задача для уравнения  $y''(x) + \lambda q(x)y(x) = 0$ , при условиях  $y(0) = y(1) = 0$ , (3) рассматривалась в работе [1]. В работе [2] исследовалась аналогичная задача при условиях (2),(3). Задача для уравнения (1) при условиях  $y(0) = y(1) = 0$ , (3) изучалась в работах [3],[4].

**Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа**

**Киселева Екатерина Олеговна**

аспирант

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

E-mail: [katerinakiseleva@mail.ru](mailto:katerinakiseleva@mail.ru)

Одной из феноменологических моделей, описывающих динамику уединенного нейрона, является нелинейное уравнение с запаздыванием вида [1]

$$u' = \lambda(-1 - r_1 \exp[-u^2(t)] + r_2[-u^2(t-1)]), \quad (1)$$

где  $\lambda$  – положительный параметр, определяющий скорость восстановления мембранного потенциала нейрона,  $r_1, r_2$  – положительные константы, характеризующие натриевый и калиевый токи соответственно, время нормировано на период запаздывания калиевого тока.

Рассмотрим динамику взаимодействия пары осцилляторов типа (1), диффузионно связанных между собой,

$$\begin{cases} u_1' = \lambda(-1 - r_1 \exp[-u_1^2(t)] + r_2 \exp[-u_1^2(t-1)])u_1 + D(u_2 - u_1) \\ u_2' = \lambda(-1 - r_1 \exp[-u_2^2(t)] + r_2 \exp[-u_2^2(t-1)])u_2 + D(u_1 - u_2) \end{cases}, \quad (2)$$

где  $D > 0$  – параметр, характеризующий связь между нейронами.

Для анализа ненулевого состояния равновесия системы (2)  $u_1 = u_2 = u_0 = \sqrt{\ln(r_2 - r_1)}$  найдем соответствующий ему характеристический квазимногочлен. При фиксированных

$r_1, r_2$  нетрудно определить критическое значение параметра  $\lambda_{кр} = \frac{(r_2 - r_1)\omega_0}{2r_2 u_0^2 \sin \omega_0}$ , при

котором на мнимую ось выходит пара корней вида  $\pm i\omega_0$  кратности 2, где  $\omega_0 = \arccos(r_1/r_2)$ , а все остальные корни лежат в левой комплексной полуплоскости.

Для локального анализа системы (2) в окрестности состояния равновесия  $(u_0, u_0)$  при близких к критическим значениям параметра  $\lambda = \lambda_{кр} + \varepsilon$  и слабой связи, такой, что  $D = \varepsilon \cdot d$ , применялся метод нормальных форм. В итоге на устойчивом интегральном многообразии системы (2) была получена трехмерная система медленных переменных

$$\begin{cases} \eta_1' = d \cdot k \eta_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - d \cdot k \cos \delta - \eta_1^2) \eta_1 \\ \eta_2' = d \cdot k \eta_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - d \cdot k \cos \delta - \eta_2^2) \eta_2 \\ \alpha' = -d \cdot k \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta) \right) + b(\eta_1^2 - \eta_2^2) \end{cases} \quad (3)$$

В системе (3) параметры  $k$  и  $b$  определяются по правым частям (2),  $\eta_j(\tau)$ ,  $\tau = \varepsilon \cdot t$ ,  $j = 1, 2$ , представляют собой нормированные амплитуды колебаний  $u_j(t)$ , а  $\alpha(\tau)$  – разность фаз этих колебаний.

Численное и аналитическое исследование системы (3) позволяет построить сценарий её фазовых перестроек при изменении  $d$ . Как оказалось, в широкой области изменения параметров  $r_1, r_2$  такой же сценарий имеет и система (2).

## Оценка качества прогнозов и прогнозирование при наличии структурных сдвигов

**Китов Виктор Владимирович**

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [vkitov@mail.ru](mailto:vkitov@mail.ru)

### Введение

Исследование посвящено улучшению методики оценки качества прогнозов эконометрических моделей, а также разработке устойчивого метода прогнозирования при наличии структурных сдвигов, что служит общей задаче построения моделей, наиболее адекватно отражающих специфику данных конечной выборки наблюдений.

Оценка качества прогнозов необходима для сравнения моделей, определения моделей, обладающих наилучшей прогнозирующей силой, а также для выявления дополнительных свойств прогнозов в целях их улучшения. В работах [1] и [2] было получено распределение статистики, оценивающей качество прогнозов, в случае, когда неизвестные параметры модели оцениваются по той же выборке наблюдений, по которой строятся прогнозы. Статистические испытания, проведенные авторами, свидетельствуют о недостаточной точности асимптотической аппроксимации распределения указанной статистики в случае, когда неизвестные параметры модели оцениваются по фиксированному числу наблюдений до момента прогнозирования.

Задача прогнозирования при наличии структурных сдвигов в выборке возникает в многочисленных приложениях, связанных с прогнозированием поведения объектов с изменяющимися качественными характеристиками. Данный феномен часто наблюдается, например, при анализе экономических и финансовых данных. В работе [3] показывается, что наличие структурных сдвигов существенным образом влияет на точность прогнозов, а в работе [4] предлагается метод устойчивого прогнозирования при их наличии. В нем, используя целочисленную оптимизацию, определяется оптимальное количество

наблюдений, по которым можно построить прогноз с наименьшим ожидаемым квадратом ошибки прогноза. Недостатками метода служит то, что он накладывает очень жесткие условия на вид моделей и метод оценки неизвестных параметров модели, а также особенность, что метод не использует всю информацию, располагаемую в выборке, при построении прогноза.

## Методы

Для статистики, оценивающей качество прогнозов, было получено асимптотическое разложение второго порядка, которое позволило определить причину неудовлетворительного качества асимптотического приближения первого порядка.

В задаче построения прогнозов при наличии структурных сдвигов был предложен новый метод при асимптотических предположениях, что величины структурных сдвигов имеют порядок  $O(1)$  и  $O(1/\sqrt{n})$ , основанный на идее взвешенного учета наблюдений из каждого структурного режима (набора наблюдений между структурными сдвигами). Неизвестные весовые коэффициенты метода находятся из условия минимизации ожидаемого квадрата ошибки прогноза, получаемого с помощью асимптотического приближения. В постановке задачи неизвестные параметры модели оцениваются методом экстремального оценивания общего вида, и не предполагается явная спецификация прогнозирующей модели, что делает метод применимым для широкого класса приложений.

## Результаты

Из асимптотического разложения следует, что статистика оценки качества прогнозов имеет смещение порядка  $O(1/\sqrt{n})$ , где  $n$  - это размер выборки. Найденное смещение имеет мультипликативный множитель, который может принимать большие значения в случае, когда неизвестные параметры модели оцениваются по фиксированному числу предшествующих наблюдений в каждый момент прогноза. Полученный результат демонстрирует, почему при таком оценивании параметров в работе [2] был сделан вывод о неудовлетворительном качестве асимптотической аппроксимации в случае небольших выборок наблюдений. Приводимые статистические испытания показывают, что корректировка статистики, оценивающей качество прогнозов, на найденное смещение позволяет существенно повысить точность асимптотического приближения, что позволяет делать более точные выводы относительно свойств прогнозов модели.

В задаче прогнозирования при наличии структурных сдвигов, используя асимптотическое приближение и статистические испытания, было показано, что предложенный метод дает значимо более точные прогнозы, чем метод, предложенный в работе [4]. Также в статистических испытаниях на примере линейной регрессии было показано, что предложенный метод дает в среднем более точные прогнозы, чем метод наименьших квадратов, примененный ко всей выборке или только к наблюдениям после структурного сдвига.

## Прогнозирование временных рядов с несимметричной функцией потерь

*Коваль Артур Сергеевич*

*студент 5 курса*

*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*

*E-mail: [archi87@rambler.ru](mailto:archi87@rambler.ru)*

Задачи прогнозирования временных рядов при несимметричной функции потерь возникают, в частности, при прогнозировании потребительского спроса. Несимметричность связана с тем, что потери от «перепрогноза», как правило, существенно ниже потерь от «недопрогноза». Методы построения адаптивных композиций алгоритмов прогнозирования хорошо разработаны для классического случая квадратичной функции потерь [1, 2]. В данной работе они обобщаются на случай несимметричной функции потерь.

Пусть  $B_1(t), \dots, B_p(t)$  – базовые алгоритмы, прогнозирующие значение одного и того же ряда в момент времени  $t$ . Строится линейная композиция  $A(t) = \sum_{i=1}^p w_i^j B_i(t)$ , где  $w_i^j$  – адаптируемые веса,  $w_i^j \geq 0$ . Для настройки весов в работе использованы следующие методы: метод несимметричных наименьших модулей (МННМ), метод локальной адаптации весов с регуляризацией (ЛАВР) [2], а также (для сравнения) простое среднее алгоритмов ( $w_i^j = 1/p$ ) и выбор наилучшего из базовых алгоритмов.

Для МННМ и ЛАВР исследовались три типа ограничений на веса:

- 1) только ограничение неотрицательности  $w_i^j \geq 0$ ;
- 2)  $w_i^j \geq 0$  и ограничение на сумму весов:  $\sum_{i=1}^p w_i^j = 1$  при любом  $t$ ;
- 3)  $w_i^j \geq 0$  и два ограничения на сумму весов:  $\sum_{i \in S} w_i^j = 1$  и  $\sum_{i \in N} w_i^j = 1$  при любом  $t$ , где  $S$  и  $N$  – подмножества индексов базовых алгоритмов, построенных, соответственно, при симметричной и несимметричной функциях потерь.

Все перечисленные методы реализованы в среде MATLAB. Вычислительные эксперименты проведены на реальных временных рядах ежедневных продаж в сети салонов сотовой связи. Для «разреженных» временных рядов (редкие продажи) методы МННМ и ЛАВР дали наиболее высокую точность прогнозов, если наложить два ограничения на сумму весов (третий тип ограничений). Для «плотного» временного ряда (ненулевые ежедневные продажи) наилучшую точность прогнозов дал метод наименьших модулей.

## Геометрические цепные дроби в задаче топологической классификации диффеоморфизмов Аносова многомерных торов

*Колуцкий Григорий Аркадьевич*

*аспирант*

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: [kolutsky AT mcsme DOT ru](mailto:kolutsky AT mcsme DOT ru)*

Недавно была обнаружена глубокая связь между геометрическими цепными дробями Клейна-Арнольда и задачей топологической классификации диффеоморфизмов Аносова многомерных торов.

Сама задача топологической классификации диффеоморфизмов Аносова  $n$ -мерного тора была сформулирована в 60-ые годы. Тогда же было получено основное продвижение

– сведение этой задачи к алгебраической задаче, точнее говоря, к линейной классификации линейных гиперболических автоморфизмов тора.

В случае двумерного тора решение последней задачи восходит ещё к Гауссу и Лагранжу. Оказывается, что полным инвариантом является пара: след линейного гиперболического оператора и период разложения в обыкновенную цепную дробь угла наклона одного из собственных векторов этого оператора. Если же рассмотреть геометрическую интерпретацию данного инварианта, то это будет в точности геометрическая версия цепных дробей, предложенная ещё Клейном. Именно поэтому в контексте исходной задачи представляет интерес такое обобщение обычных цепных дробей, как геометрические цепные дроби Клейна-Арнольда.

Основной результат нашей работы состоит в том, что гиперболические автоморфизмы  $n$ -мерного тора линейно сопряжены тогда и только тогда, когда соответствующие им геометрические цепные дроби линейно эквивалентны.

### Уравнение диффузии с вырождением в области с переменным коэффициентом

**Коробенко Людмила Викторовна**

студентка, 6 курс

Московский Физико-Технический Институт (государственный университет),

Факультет Управления и Прикладной Математики, Москва, Россия

E-mail: [luda.korobenko@gmail.com](mailto:luda.korobenko@gmail.com)

Изучается процесс диффузии в области с коэффициентом диффузии, испытывающим скачок. Исследуется задача Коши для уравнения диффузии следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = LU \\ U(x, t)|_{t=0} = U_0(x) \end{cases}$$

Оператор  $L$  был найден в работе [1]. Область определения этого оператора составляют функции, удовлетворяющие требованиям конечности скорости потока и сохранения числа частиц. Действие оператора на функцию концентрации определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} LU &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{D(x)} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{D(x)} U) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (a(x) U) \\ D(x) &= \begin{cases} 0, x < 0 \\ D, x > 0 \end{cases}, \quad a(x) = \begin{cases} a, x < 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Где  $a$  и  $D$  коэффициенты сноса и диффузии соответственно. Как видно из (1), коэффициент диффузии обращается в ноль на одной из полуосей, т.е. задача вырождена. Наряду с вырожденным оператором рассматривается регуляризованный оператор:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon U &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{D_\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{D_\varepsilon(x)} U) \right) - \frac{\partial}{\partial x} (a(x) U) \\ D_\varepsilon(x) &= \begin{cases} \varepsilon, x < 0 \\ D, x > 0 \end{cases}, \quad a(x) = \begin{cases} a, x < 0 \\ 0, x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрен вопрос о разрешимости уравнения с вырождением и сходимости последовательности решений регуляризованной задачи к решению вырожденной. А именно: 1) показано существование решения регуляризованной задачи; 2) показано существование решения вырожденной задачи в случае  $a > 0$ ; 2) доказана сходимость

последовательности решений регуляризованной задачи к решению вырожденной в  $L_1$ -норме в случае, когда последнее существует.

### Зависимость между формулами обычного и адамарова умножения матриц

**Кузнецова Оксана Сергеевна**

студент

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: [adrenaleen@lipetsk.ru](mailto:adrenaleen@lipetsk.ru)

В матричной алгебре обычное произведение матриц определяется как последовательное умножение строк одной матрицы на столбцы другой, адамарово же умножение определяется поэлементно, аналогично сложению матриц или умножению матрицы на число [1]. Адамарово умножение намного проще обычного и по скорости достижения результата оказывается быстрее последнего. Таким образом появилась задача – связать эти виды умножения матриц [2].

Для матриц размера  $n \times n$  обычное умножение выражается через адамарово следующим образом:

$$AB = \sum_{i=0}^{n-1} P_n^{(i)} * \left( \sum_{j=0}^{n-1} (AP_n^{(j)}) * (P_n^{(j \theta_i)} B) \right), \text{ где } j \theta_i = j - i \pmod{n} = \begin{cases} i - j, 0 \leq j - i \leq n - 1; \\ j - i + n, j - i < 0. \end{cases}$$

Здесь  $A$  и  $B$  - исходные матрицы, а  $P$  - матрица перестановок (квадратная бинарная матрица, в каждой строке и столбце которой находится лишь один единичный элемент) [3]. Матрица перестановок используется здесь скорее как форма записи исходных матриц со сдвинутыми влево или вверх соответственно столбцами и строками, а не как реально используемая операция. В этой формуле последовательно заполняется нулевая матрица нужными элементами, полученными в результате обычного умножения.

Рассмотрим для примера матрицы размера  $2 \times 2$ :

$$P_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, AP_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, P_2^{(1)} B = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{bmatrix}; AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Так как рассматриваются матрицы размера  $2 \times 2$ , в конечной формуле будет сумма двух произведений. Первое слагаемое будет состоять из элементов, стоящих на главной диагонали, а второе – на побочной. Для этого «выберем» элементы из матрицы  $AB$ .

Рассмотрим элемент  $a_{11}b_{11}$  матрицы  $AB$ . Его можно получить, умножив  $A * B$ , но т.к. на побочной диагонали присутствуют элементы, не входящие в матрицу  $AB$ , умножим  $A * B$  еще и на  $P_2^{(0)}$ . Таким образом получим матрицу, на главной диагонали которой стоят элементы  $a_{11}b_{11}$  и  $a_{22}b_{22}$ . Применяя аналогичные рассуждения к остальным элементам матрицы  $AB$ , получим матрицу, состоящую из элементов, расположенных на побочной диагонали. Сложив получившиеся две матрицы, получим формулу связи обычного и адамарова умножения матриц для матриц размера  $2 \times 2$ :

$$AB = (A * B + AP_2^{(1)} * P_2^{(1)} B) * P_2^{(0)} + (A * P_2^{(1)} B + P_2^{(1)} A * B) * P_2^{(1)}.$$

**Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами**  
**Куртова Лилиана Николаевна**

*аспирант*

*Белгородский государственный университет, Белгород, Россия*

*E-mail: [lmoskalenko@bsu.edu.ru](mailto:lmoskalenko@bsu.edu.ru)*

В 1927 году А.Е. Ингам поставил и решил элементарным методом задачу получения асимптотической формулы для числа  $J(n)$  решений уравнения:  $x_1x_2 - x_3x_4 = 1$ ,  $x_1x_2 \leq n$ . В 1931 году Т. Эстерман [1] круговым методом вывел асимптотическую формулу  $J(n) = nP_2(\ln n) + R(n)$ , где  $P_2(t)$  – многочлен степени 2, а  $R(n) = O(n^{11/12} \ln^{17/3} n)$ . В 1979 году Д.И. Исмоилов [2], развивая метод Т. Эстермана, доказал, что  $R(n) = O(n^{5/6+\varepsilon})$ , где  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малая постоянная. Практически одновременно с Исмоиловым другим методом аналогичную оценку получил Д. Р. Хиз-Браун [3]. В 1982 году Ж.-М. Дезуйе и Х. Иванец [4], используя оценку суммы сумм Клостермана, довели остаток до  $R(n) = O(n^{2/3+\varepsilon})$ .

В математической литературе известны многочисленные аналоги данной задачи. Рассмотрим один из таких аналогов.

Пусть  $d$  – отрицательное бесквадратное число,  $F = Q(\sqrt{d})$  – мнимое квадратичное поле,  $\delta_F$  – дискриминант поля  $F$ ,  $Q_1(\bar{m}) = \frac{1}{2} \bar{m}^{-t} A_1 \bar{m}$  и  $Q_2(\bar{k}) = \frac{1}{2} \bar{k}^{-t} A_2 \bar{k}$  – бинарные положительно определенные примитивные квадратичные формы с матрицами  $A_1$  и  $A_2$ ,  $\det A_1 = \det A_2 = -\delta_F$ . Формы  $Q_1(\bar{m})$  и  $Q_2(\bar{k})$  могут быть неодноклассными. Пусть

$$I(n, h) = \sum_{Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h} e^{-\frac{Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})}{n}}.$$

Сумма  $I(n, h)$  представляет собой число решений уравнения  $Q_1(\bar{m}) - Q_2(\bar{k}) = h$ , причем каждое решение считается с «весом»  $e^{-\frac{Q_1(\bar{m}) + Q_2(\bar{k})}{n}}$ .

Нашим основным результатом является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число,  $\delta_F$  – дискриминант мнимого квадратичного поля  $F$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h$  – натуральное число, такое, что  $h \equiv 0 \pmod{|\delta_F|}$ ,  $h \leq n^\varepsilon$ .

Справедлива асимптотическая формула

$$I(n, h) = \frac{2\pi^2 n}{|\delta_F|} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0 \\ (l, q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) + O(n^{7/12+\varepsilon}).$$

$G_1(q, l, \bar{0}) = \sum_{\bar{m} \pmod{q}} \exp(2\pi i \frac{lQ_1(\bar{m})}{q})$  и  $G_2(q, -l, \bar{0}) = \sum_{\bar{k} \pmod{q}} \exp(-2\pi i \frac{lQ_2(\bar{k})}{q})$  – двойные суммы

Гаусса. Сумма особого ряда  $\sum_{q=1}^{\infty} q^{-4} \sum_{\substack{l=0 \\ (l, q)=1}}^{q-1} e^{-2\pi i \frac{hl}{q}} G_1(q, l, \bar{0}) G_2(q, -l, \bar{0}) \geq c(\delta_F, h) > 0$ .

## **Кучеренко Игорь Викторович**

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [ivkmailbox@gmail.com](mailto:ivkmailbox@gmail.com)

Клеточные автоматы (КА) являются дискретными математическими моделями широкого класса реальных систем вместе с протекающими в них процессами [1], [2]. Важное семейство клеточных автоматов образуют обратимые КА, то есть такие, в которых “предыстория” возникновения конфигурации определяется однозначно. Эти объекты имеют много приложений, в том числе в вопросах защиты информации.

При изучении процесса функционирования клеточного автомата естественным образом возникает понятие информационного конуса [1], представляющего из себя функцию зависимости состояния ячейки от начального состояния КА, проиндексированную моментами времени. Для фиксированного момента времени информационный конус является суперпозицией локальных функций перехода. Множество информационных конусов представляет из себя некоторую логику, которая композиционно (и даже суперпозиционно) замкнута. Эта логика, итеративно развиваясь во времени, определяет логику поведения любого фрагмента КА, а в пределе и всего КА. Тем самым логика ячейки выступает в качестве порождающего элемента для логики всего КА. В двухзначном случае Поста описаны все замкнутые логики. Естественно рассмотреть расслоение всех клеточных автоматов на типы, соответствующие классам Поста, и явление обратимости изучать с точностью до указанного расслоения.

Автором была решена задача описания распределения локальных функций переходов (ЛФП) обратимых бинарных клеточных автоматов по классам Поста.

**Теорема 1.** Пусть класс Поста  $K$  не содержит линейной функции, существенно зависящей как минимум от трех переменных, и сохраняющей обе константы. Тогда в  $K$  содержатся ЛФП только тривиальных обратимых КА.

В работе [3] установлено, что конструктивного способа проверки на обратимость для класса всех бинарных клеточных автоматов не существует. Следующая теорема автора дает усиление указанного результата

**Теорема 2.** Свойство обратимости алгоритмически распознаваемо в классе клеточных автоматов с ЛФП из класса Поста  $K$  тогда и только тогда, когда  $K$  не содержит множества всех самодвойственных функций, сохраняющих обе константы.

## **О средней сложности поиска для случайных неравномерных потоков запросов и баз данных**

**Кучеренко Наталья Сергеевна**

аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

[nsk.email@gmail.com](mailto:nsk.email@gmail.com)

Теория хранения и поиска информации является важным разделом теории интеллектуальных систем. Одним из ключевых объектов этой теории является информационный граф (ИГ) [1] – управляющая система, которая позволяет рассматривать имеющиеся модели данных и задачи, связанные с ними, с более общих позиций.

В данной работе в рамках информационно-графовой модели данных рассматривается задача поиска идентичных объектов (ЗПИО) на интервале  $(0,1)$ . Формально ЗПИО на интервале  $(0,1)$  – это четверка  $((0,1), V, \rho, f(x))$ , где  $(0,1)$  – множество запросов,  $V = (y_1, \dots, y_n)$  – конечный набор точек интервала  $(0,1)$ , элементы которого упорядочены по возрастанию. Множество  $V$  называется библиотекой, а элементы библиотеки –

записями.  $\rho =$  – отношение равенства на множестве  $(0,1) \times (0,1)$ . Предполагается, что запрос  $x$  случайная величина на интервале  $(0,1)$ , распределение которой задается с помощью функции плотности  $f(x)$ . С помощью информационных графов моделируются алгоритмы поиска в библиотеке, использующие только операции сравнения.

Поскольку на множестве запросов задано вероятностное пространство, для информационного графа  $U$  вводится понятие сложности  $T(U)$  как математического ожидания сложности ИГ  $U$  на запросе [1]. Сложность задачи  $T(I)$  определяется как инфимум сложности всех ИГ, которые решают задачу  $I$ . Информационный граф, на котором достигается инфимум, называется *оптимальным*. Для любой задачи  $((0,1), V, \rho, f(x))$  оптимальный информационный граф существует.

С помощью информационного графа всегда можно реализовать логарифмический поиск, который имеет сложность, равную логарифму от мощности библиотеки. Затраты на построение оптимального ИГ оцениваются квадратом от мощности библиотеки, при этом сложность оптимального ИГ может быть как константой, так и логарифмом, в зависимости от конкретной задачи.

В работе рассмотрен класс задач поиска идентичных объектов  $\Psi_n(f, g)$  в котором элементы библиотеки  $V_n = (y_1, \dots, y_n)$  являются независимыми случайными величинами на интервале  $(0,1)$  с плотностью распределения  $g$ , а распределение запросов задается с помощью функции плотности  $f$ . Если через  $T_n^{(f,g)}(V)$  обозначить сложность ЗПИО из класса  $\Psi_n(f, g)$ , то как функция от  $V$  величина  $T_n^{(f,g)}(V)$  является случайной.

**ТЕОРЕМА.** Пусть функции плотности  $f$  и  $g$  удовлетворяют следующим условиям

$$\forall x \in (0,1) \quad c_1' > f(x) > c_1 > 0, \quad c_2 > g(x) > c_2' > 0,$$

тогда  $M_V(T_n^{(f,g)}(V))$  асимптотически не меньше, чем  $\frac{c_1}{c_2} \cdot \log_2 n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## NP-полнота и полиномиально разрешимые случаи задач управления и проверки устойчивости для схем функциональных элементов в k-значной логике

*Лебедев Анатолий Анатольевич*

*аспирант*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*Мех.-мат. ф-т, к-дра Математической Теории Интеллектуальных Систем*

*E-mail: [lebedev\\_aa@rambler.ru](mailto:lebedev_aa@rambler.ru)*

Технология информационного мониторинга [**Error! Reference source not found.**] была разработана для анализа сложных, слабоформализованных проблем (процессов) на основе всей доступной информации, построения прогнозов их развития и выработки рекомендаций по управлению их развитием.

В данной работе технология информационного мониторинга формализуется с использованием классического аппарата дискретной математики – схем функциональных элементов и функций k-значной логики [**Error! Reference source not found.**]. В этой формализации решаются 2 ключевые задачи технологии информационного мониторинга – проверка устойчивости модели и задача оптимального управления.

### Задача проверки устойчивости

$F(x_1, \dots, x_N)$  – функция k-значной логики, заданная схемой функциональных элементов над базисом, состоящим из всех функций от n и менее переменных. Для заданного  $1 \leq A < k$  необходимо проверить, удовлетворяет ли F условию:

$$\max_{i=1,\dots,N} |x_i - y_i| \leq A \Rightarrow |F(x_1, \dots, x_N) - F(y_1, \dots, y_N)| \leq A$$

### Задача оптимального управления

Функция  $F(x_1, \dots, x_N)$  задана аналогично,  $a_1, \dots, a_N$  - начальные значения переменных,  $C_i(x)$  - стоимость присвоения  $i$ -ой переменной значения  $x$  (из текущего состояния). Для заданного  $C$  необходимо максимизировать  $F(x_1, \dots, x_N)$  при ограничении  $\sum_i |C_i(x_i)| \leq C$

Доказывается NP-полнота [Error! Reference source not found.] обеих задач и выделяются наиболее часто встречающиеся на практике классы случаев, для которых задачи разрешимы за полиномиальное время. Для произвольно заданной схемы приводится алгоритм, проверяющий принадлежность схемы этим классам.

### Вероятностные характеристики расстояний между точками евклидова пространства, отличающимися случайными поворотами или отражениями

*Лясникова Светлана Михайловна*

*студент*

*Мурманский государственный технический университет, политехнический факультет,  
Мурманск, Россия*

*E-mail: LyasnikovaSM@yandex.ru*

**Цель работы** вычисление некоторых вероятностных характеристик расстояний между точками в многомерном евклидовом пространстве при случайных поворотах и отражениях. Далее везде под точкой в  $R^{2N}$  понимаем упорядоченный набор  $N$  точек плоскости. Результаты работы представлены теоремами, для доказательства которых были использованы материалы [1],[2].

**Теорема 1.** Пусть имеется точка в  $R^{2N} \{A = A_i(x_i, y_i), i = \overline{1, N}\}$ . Координаты этой точки подвергаются одному из двух преобразований. **Преобразование 1** – это поворот каждой проекции  $A$  на плоскости на один и тот же случайный угол  $\varphi$  относительно фиксированной точки  $(x_0, y_0)$ . **Преобразование 2** – это отражение тех же самых проекций на плоскости относительно оси, повернутой на случайный угол  $\varphi$  относительно точки  $(x_0, y_0)$ . В результате одного из двух преобразований получается новая точка в  $R^{2N}$ . Случайный угол  $\varphi$  равномерно распределен в интервале  $[0, 2\pi)$ . Тогда, плотность вероятности расстояний между исходной и полученной точкой, определяется выражением:  $P_D(d) = \begin{cases} 2X / (\pi \cdot \sqrt{Y^2 - Z^2}), & p_1 \leq d \leq p_2 \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$  (1). В случае преобразования 1:  $X = 1, Y = d_{\max}, Z = d,$

$p_1 = 0, p_2 = Y$ . В случае преобразования 2:  $X = d, Y = E, Z = d^2 - (A+C)/2, p_1 = \sqrt{(A+C)/2 - E}, p_2 = \sqrt{(A+C)/2 + E}, E = \sqrt{B^2 + ((C-A)/2)^2}, A = 4 \sum_{i=1}^N (x_i - x_0)^2, C = 4 \sum_{i=1}^N (y_i - y_0)^2, B = 4 \sum_{i=1}^N (x_i - x_0)(y_i - y_0)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия Теоремы 1, тогда начальные моменты расстояния  $d$ :  $\overline{d^k} = T \sum_{r=0}^m ((\Gamma(k/2+1)/(\Gamma(k/2-2r+1)(2r)!)) \cdot C_{2r}^r \cdot H^{2r} / (U^{2r} 2^{2r}))$  (2). В случае преобразования 1:  $T = d_{\max}^k / 2^{k/2}, U = 1, H = 1$ . В случае преобразования 2:  $T = ((A+C)/2)^{k/2}, U = T, H = \sqrt{B^2 + ((C-A)/2)^2}$ . При  $k = 2n$ :  $m = [n/2]$  и при  $k = 2n+1$ :  $m = \infty$ .

**Теорема 3.** Пусть задана точка из  $R^{2N}$ , множество координат этой точки разбивается на две произвольные части. Каждая из частей подвергается одному из двух одинаковых преобразований, описанных в Теореме 1, тогда плотность вероятности вычисляется в виде

свертки плотностей определенных в Теореме 1:  $P_D(d) = \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(L_1) J_0(L_2) e^{-i\omega y} d\omega$  (3). В случае

преобразования 1:  $L_1 = d_{\max 1}^2 / 2$ ,  $L_2 = d_{\max 2}^2 / 2$ ,  $v = d_{\max 1}^2 \cos \varphi_1 / 2 + d_{\max 2}^2 \cos \varphi_2 / 2$ . В случае преобразования 2:

$$L_1 = \sqrt{B_1^2 + ((C_1 - A_1)/2)^2}, L_2 = \sqrt{B_2^2 + ((C_2 - A_2)/2)^2}, v = \sqrt{B_1^2 + ((C_1 - A_1)/2)^2} \sin(2\varphi_1 + \beta_1) + \sqrt{B_2^2 + ((C_2 - A_2)/2)^2} \sin(2\varphi_2 + \beta_2), \beta_1 = \text{const}, \beta_2 = \text{const}.$$

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия Теоремы 3, тогда начальные моменты расстояния

$$d: \quad \overline{d^k} = S^{k/2} \sum_{r=0}^m \left( \frac{1}{S^{2r}} (\Gamma(k/2+1)/(\Gamma(k/2-2r+1)(2r)!)) \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}} \sum_{r=0}^n \frac{1}{(r!)^2 ((n-r)!)^2} (L_1)^{2r} (L_2)^{2n-2r} \right) \quad (4).$$

преобразования 1:  $S = (d_{\max 1}^2 + d_{\max 2}^2) / 2$ . В случае преобразования 2:  $S = (A_1 + A_2 + C_1 + C_2) / 2$ . При  $k = 2n$ :

$$m = [n/2] \text{ и при } k = 2n+1: m = \infty.$$

**Заключение.** Результаты могут быть обобщены на более сложные геометрические структуры и преобразования (они имеют прикладное значение и могут быть использованы в задачах статистического распознавания групповых точечных объектов).

### Последовательная идентификация пороговой авторегрессии

*Марков Александр Сергеевич*

*аспирант*

*Томский государственный университет*

*E-mail: [markovalexander@mail.ru](mailto:markovalexander@mail.ru)*

Рассмотрим модель пороговой авторегрессии первого порядка [1] вида

$$X_k = \theta_1 X_{k-1}^+ + \theta_2 X_{k-1}^- + \varepsilon_k, \quad X_0 = 0, \quad k \geq 1,$$

где  $x^+ = \max\{x, 0\}$ ,  $x^- = \min\{x, 0\}$ ;  $\{\varepsilon_k\}_{k \geq 1}$  – последовательность независимых одинаково

распределенных случайных величин (шум) с всюду положительной плотностью,  $E\varepsilon_1 = 0$ ,

$E\varepsilon_1^2 = 1$ ;  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  – вектор неизвестных параметров модели. Для оценивания

неизвестных параметров  $\theta_1, \theta_2$  используется последовательная процедура идентификации.

Для каждого  $H > 0$  введем моменты остановки

$$\tau_+(H) = \inf \left\{ n : \sum_{k=2}^n (X_{k-1}^+)^2 \geq H \right\}, \quad \tau_-(H) = \inf \left\{ n : \sum_{k=2}^n (X_{k-1}^-)^2 \geq H \right\},$$

и определим величины  $\alpha_{\pm}$  такие, что  $\sum_{k=2}^{\tau_{\pm}(H)-1} (X_{k-1}^{\pm})^2 + \alpha_{\pm} (X_{\tau_{\pm}(H)}^{\pm})^2 = H$ . Последовательные

оценки  $\hat{\theta}_1(H), \hat{\theta}_2(H)$  неизвестных параметров  $\theta_1, \theta_2$  определим в виде

$$\hat{\theta}_1(H) = \frac{1}{H} \left( \sum_{k=2}^{\tau_+(H)-1} X_{k-1}^+ X_k + \alpha_+ X_{\tau_+(H)-1}^+ X_{\tau_+(H)} \right),$$

$$\hat{\theta}_2(H) = \frac{1}{H} \left( \sum_{k=2}^{\tau_-(H)-1} X_{k-1}^- X_k + \alpha_- X_{\tau_-(H)-1}^- X_{\tau_-(H)} \right).$$

Построенные оценки обладают свойствами гарантированности, несмещенности и равномерной по параметрам асимптотической нормальности на любом компакте из области

$$\Omega = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_1 < 1, \theta_2 < 1, \theta_1 \theta_2 < 1\}.$$

**Лемма.** Для любого  $H > 0$

A)  $\tau_1(H) < \infty, \tau_2(H) < \infty$ .

B)  $E_{\theta} \hat{\theta}_1(H) = \theta_1, E_{\theta} \hat{\theta}_2(H) = \theta_2$  для любых  $\theta_1 \leq 1, \theta_2 \leq 1$ .

C)  $\sup_{\theta_1 \leq 1, \theta_2 \leq 1} E_{\theta} \left( \hat{\theta}_1(H) - \theta_1 \right)^2 \leq \frac{1}{H}, \sup_{\theta_1 \leq 1, \theta_2 \leq 1} E_{\theta} \left( \hat{\theta}_2(H) - \theta_2 \right)^2 \leq \frac{1}{H}$ .

**Теорема.** Для любого компактного множества  $K \subset \Omega$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in K} \sup_{x \in R^2} \left| P_{\theta} \left( \sqrt{H} (\hat{\theta}_1(H) - \theta_1) \leq x_1, \sqrt{H} (\hat{\theta}_2(H) - \theta_2) \leq x_2 \right) - \Phi(x_1) \Phi(x_2) \right| = 0,$$

где  $\Phi(x)$  - стандартная функция распределения нормального закона.

## Необходимые условия наличие свойства Пенлеве для систем дифференциальных уравнений второго порядка

**Масюкевич Елена Мечиславовна**

магистрант

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, математический факультет, Гродно, Беларусь

lena-mas@tut.by

Рассмотрим систему

$$(x')^n = A(x,t) + y \cdot B(x,t), \quad (y')^n = C(y,t) + x \cdot D(y,t), \quad (1)$$

где  $A(x,t)$ ,  $B(x,t)$  — рациональные функции по  $x$  с аналитическими по  $t$  коэффициентами,  $C(y,t)$ ,  $D(y,t)$  — рациональные функции по  $y$  с аналитическими по  $t$  коэффициентами.

Особые точки решений дифференциальных уравнений, положение которых зависит от начальных данных, определяющих частное решение, называют подвижными особыми точками. Если в качестве подвижных особенностей решений могут быть лишь однозначные полюсы, то уравнения и системы с такими решениями называют уравнениями и системами типа Пенлеве или Р-типа. В этом случае также говорят, что уравнения или системы обладают свойством Пенлеве.

Найденные необходимые условия, при которых система (1) не имеет подвижных критических особых точек, сформировали в лемме.

**Лемма.** Для того чтобы система

$$x'^m = P(x, y, t), \quad y'^n = Q(x, y, t), \quad (2)$$

где  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P$  и  $Q$  полиномиальные по  $y$  и  $x$ , рациональные по  $x$  и  $y$  соответственно и локально аналитические по  $t$  функции, не имела подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы  $P$  и  $Q$  были полиномами по  $x$ ,  $y$ .

Согласно лемме 1, чтобы система (1) не имела подвижных критических особых точек необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{aligned} (x')^n &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 + y(b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0), \\ (y')^n &= C(y,t) + x \cdot D(y,t), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Рассмотрели случаи относительно  $k$  и  $n$ , которые показали, что для отсутствия подвижных критических особых точек у решений системы (3) необходимо требовать  $n \leq 4$ ,  $k \leq 4$ , т.е. ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} (x')^n &= a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + y(b_{2n} x^{2n} + b_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + b_1 x + b_0), \\ (y')^n &= c_m y^m + c_{m-1} y^{m-1} + \dots + c_1 y + c_0 + x(d_k y^k + d_{k-1} y^{k-1} + \dots + d_1 y + d_0), \end{aligned}$$

где  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Учитывая симметрию вхождения переменных в систему (1) и результаты исследования системы (3), можно сказать, что для того, чтобы система (1) не имела подвижных критических особых точек необходимо, чтобы она имела вид

$$\begin{aligned} (x')^n &= a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0 + y(b_{2n}x^{2n} + b_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + b_1x + b_0), \\ (y')^n &= c_{2n}y^{2n} + c_{2n-1}y^{2n-1} + \dots + c_1y + c_0 + x(d_{2n}y^{2n} + d_{2n-1}y^{2n-1} + \dots + d_1y + d_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i, i = \overline{1, 2n}$  функции аналитические по  $t$ .

**Теорема.** Для того чтобы решения системы (1) не имели подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы она имела вид (4).

## Численное моделирование процесса промерзания и морозного пучения грунтов

*Матвеева Майя Васильевна*

лаборант

*Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия*

*E-mail: [m-mayza@mail.ru](mailto:m-mayza@mail.ru)*

Промерзание влажных грунтов часто сопровождается их пучением, которое обусловлено рядом массообменных, физико-химических и физико-механических процессов. Работами многих исследователей доказано значительная роль миграции влаги в морозном пучении. К основным параметрам, определяющим морозное пучение грунтов, относятся: начальная влажность, полная влагоёмкость, содержание незамёрзшей воды, температурный режим, глубина сезонного промерзания, скорость промерзания, глубина залегания водоносного горизонта, теплофизические и массообменные свойства пород. Таким образом, исследование морозного пучения грунтов, в первую очередь, предполагает знание динамики теплового и влажностного режима грунтов в процессе их промерзания.

Исследование температурно-влажностного режима грунтов с учётом фазовых превращений поровой влаги в процессе их промерзания выполнено на математической модели тепломассопереноса в случае, когда не учитываются количество тепла, переносимое миграционным потоком влаги, и термоградиентный механизм переноса влаги [1].

Морозное пучение является результатом увеличения объёма поровой воды при её переходе в лёд. В процессе промерзания происходит перераспределение влаги путем её миграции, которое при определенных условиях может привести к пучению и образованию внутри промёрзшего слоя прослоек льда различной мощности.

Вывод формулы для расчёта величины пучения основан на предположении, что увеличение объёма грунта происходит вследствие увеличения объёма порового вещества за счет перехода воды в лёд. Расширение объёма происходит по высоте (по направлению к дневной поверхности грунта) без возможности бокового расширения, как это принимается в задаче о компрессионном уплотнении грунтов [2].

Результаты численного исследования процесса промерзания грунтов дают достаточно точный прогноз динамики температурного и влажностного полей, а также возникающего при этом пучения. Она дает возможность в достаточно близкой к реальным условиям постановке вскрыть основные закономерности формирования криогенных текстур и величины пучения.

**Об аппроксимации производных по направлениям для многочлена Эрмита на треугольнике.**

**Мелешикина Анна Владимировна**

Студент

Саратовский Государственный Университет им. Н.Г.Чернышевского, механико-математический факультет, г. Саратов, Россия

E-mail: [AVMeleshkina@mail.ru](mailto:AVMeleshkina@mail.ru)

Пусть  $A_1, A_2, A_3$  - вершины замкнутого невырожденного треугольника  $T$ ,  $f(x)$  - функция, определенная на  $T$  и непрерывная вместе со своими частными производными до четвертого порядка включительно. Пусть также  $e_{ij}$  - единичные векторы, коллинеарные сторонам треугольника. Пусть  $Q(x)$  - интерполяционный многочлен Эрмита третьей степени, удовлетворяющий следующим условиям:

$$f(A_i) = Q(A_i), \quad \frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}, \quad j \neq i, \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (1)$$

Условия (1) определяют многочлен третьей степени неоднозначно. Для однозначного определения требуется еще одно условие. В качестве такого условия Zenisek A. [1] выбрал равенство производных по нормали многочлена и функции в средней точке наименьшей стороны треугольника и доказал следующее неравенство для отклонения частных производных первого порядка:

$$\left| \frac{\partial(f - Q)(x)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{4}{15} \left( 1 + \left( \frac{a}{c} \right)^2 \right) \frac{M_4 c^3}{\sin \beta}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где  $a$  - длина наименьшей стороны треугольника,  $c$  - длина наибольшей стороны,  $\beta$  - средний по величине угол треугольника,  $M_4$  - максимум абсолютных величин частных производных четвертого порядка функции  $f(x)$  на треугольнике  $T$ .

При тех же предположениях имеют место следующие оценки отклонения производных по направлениям сторон треугольника до третьего порядка включительно.

*Теорема.*

Пусть  $T = (A_1 A_2 A_3)$  - замкнутый невырожденный треугольник,  $f(x) \in C^4$  - функция, определенная на  $T$ . Пусть  $Q(x)$  - интерполяционный многочлен Эрмита третьей степени, удовлетворяющий условиям (1) и (3):

$$\frac{\partial f(P)}{\partial n} = \frac{\partial Q(P)}{\partial n}, \quad (3)$$

где  $P$  - средняя точка наименьшей стороны треугольника,  $n$  - вектор нормали, проведенный к наименьшей стороне. Пусть  $M_4$  - максимум абсолютных величин производных четвертого порядка по всевозможным направлениям функции  $f(x)$  на треугольнике  $T$ ,  $d$  - диаметр треугольника. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial^{n_1+n_2+n_3} (f - Q)(x)}{\partial e_{12}^{n_1} \partial e_{23}^{n_2} \partial e_{13}^{n_3}} \right| \leq C \cdot M_4 \cdot d^{4-(n_1+n_2+n_3)}, \quad n_i \geq 0, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^3 n_i \leq 3, \quad (4)$$

где  $C$  - универсальная константа, зависящая от функции.

В общем случае можно брать  $C = 8.5$ . Полученная оценка является точной. Из соотношений (4) как следствие получаются неравенства (2).

## Использование биквазигрупп в криптографии

Мещерякова Ольга Викторовна

студентка

Липецкий государственный технический университет,  
факультет автоматизации и информатики, г. Липецк, Россия

E-mail: [syperolga@mail.ru](mailto:syperolga@mail.ru)

### Введение

Одно из перспективных направлений в криптографии – использование неассоциативных структур [1]. Криптография тесно связана с решением уравнений. В данной работе рассмотрена возможность применения биквазигрупп в криптографии.

Биквазигруппа определяется заданием двух операций над элементами некоторого множества  $S$  и обозначается  $BQ = \langle S, \bullet, \blacklozenge \rangle$ . При этом каждое из уравнений  $A \bullet x = B$  и  $x \blacklozenge A = B$  имеет ровно одно решение. Количество квазигрупп порядка  $n$  больше чем  $n! \cdot (n-1)! \cdot \dots \cdot 2! \cdot 1!$  [2].

### Применение биквазигрупп

Предположим, что отправителю необходимо передать получателю сообщение  $X$ . Пусть секретный ключ задан биквазигруппой  $BQ = \langle S, \bullet, \blacklozenge \rangle$ , где  $S$  – является алфавитом. Отправителю необходимо зашифровать блок  $x$  сообщения  $X$ , для этого он использует ключ  $A, B$ :

$$(1) C = (A \bullet x) \blacklozenge B$$

Получает зашифрованное сообщение  $C$  и отправляет его пользователю  $M$ . Тот в свою очередь для нахождения исходного сообщения разбивает двустороннее уравнение (1) на два: правостороннее (2) и левостороннее (3)

$$(2) y \blacklozenge B = C,$$

$$(3) A \bullet x = y,$$

вычисляет сопровождающий элемент [3]  $\blacklozenge B$ , такой что выполняется требование (4)

$$(4) (\forall B) (\exists \blacklozenge b) (\forall x) \{((y \blacklozenge B) \blacklozenge \blacklozenge b) \blacklozenge B = y \blacklozenge B\}.$$

Тогда критерий разрешимости уравнения (2)

$$(5) (C \blacklozenge \blacklozenge B) \blacklozenge B = C$$

и его частное решение

$$(6) y = C \blacklozenge \blacklozenge B.$$

Сопровождающий элемент  $A^*$  в уравнении (3) должен удовлетворять требованию (7)

$$(7) (\forall A) (\exists A^*) (\forall x) \{A \bullet (A^* \bullet (A \bullet x)) = A \bullet x\},$$

тогда критерий разрешимости

$$(8) y = A \bullet (A^* \bullet y)$$

и частное решение

$$(9) x = (A^* \bullet y).$$

Тогда получатель находит исходное сообщение:

$$(10) x = A^* \bullet (C \blacklozenge \blacklozenge B).$$

### Результаты

Таким образом, в работе предложен способ применения биквазигрупп в криптологии. Следует отметить, что биквазигруппы неассоциативны, что усложняет процесс вскрытия зашифрованной информации и, тем самым увеличивает криптостойкость алгоритма [3].

**Миронов Андрей Михайлович**

студент

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [mironov@intsys.msu.ru](mailto:mironov@intsys.msu.ru)

В работе рассмотрена графовая модель процессов с передачей сообщений, и предложен новый метод верификации таких моделей. Автором введено понятие параметрического бимоделирования, которое является синтезом понятия наблюдаемого бимоделирования и понятия инварианта поведения программы.

Предложенный метод иллюстрирован примером верификации процесса "композиция буферов ограниченного размера".

### **Задача многопроцессорного расписания**

**Мирошниченко Роман Викторович**

студент

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова

E-mail: [markususa@ya.ru](mailto:markususa@ya.ru)

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Пусть есть  $N$  процессоров, скорости выполнения задач которых задаются константами  $v_i > 0 (1 \leq i \leq N)$  ( $\forall i = 1..N-1: v_i \leq v_{i+1}$ ). Также имеется  $N$  работ, где  $ob_i > 0 (1 \leq i \leq N)$  ( $\forall i = 1..N-1: ob_i \leq ob_{i+1}$ )- их объемы. В любой момент времени каждую из задач может выполнять только один механизм (процессор). Необходимо определить расписание: какому процессору какую работу назначить и, при необходимости, моменты передачи работ между механизмами. Цель - минимизировать время выполнения всего плана работ.

**Определение. КДТ** (квадрат достижения  $T$ ) – набор процессоров и работ, на котором достигается  $T$ .

**Определение. НеКДТ** – набор процессоров и работ, не входящих в состав КДТ.

**Утверждение 1.** Все процессоры из КДТ должны работать постоянно.

**Следствие 2(утв1).** За  $T$  в КДТ будет выполнен нужный объем.

**Утверждение 2.** Все работы из НеКДТ должны выполняться процессорами из НеКДТ.

**Утверждение 3.** Весь план работ можно разбить на два подмножества {КДТ и НеКДТ} без их пересечения (НеКДТ может быть пустым).

**Утверждение 4.** Существует расписание КДТ, при котором процессоры работают время  $T$  без помех.

**Теорема 1.** Любую задачу, обладающую НеКДТ, можно разбить на несколько непересекающихся подзадач, состоящих только из КДТ.

**Определение. минКДТ**– набор процессоров и работ, на котором достигается  $T$  и в котором не существует двух подмножеств индексов работ  $IO$  и механизмов  $IM$ , таких, что

$$\left( \sum_{IO} ob_i \right) / \left( \sum_{IM} v_i \right) = T .$$

**Определение. Расписание**  $(n-1) \times 2 + 1$  - это расписание минКДТ, при котором существует  $(n-1)$  штук работ, для выполнения которых достаточно назначения двух процессоров.

**Теорема 2.** Любой КДТ, не являющимся минКДТ, можно разбить на несколько минКДТ с тем же  $T$ .

**Гипотеза.** Для любого минКДТ существует  $(n-1) \times 2 + 1$  расписание.

## О реализации автоматов нейронными сетями

Моисеев Станислав Владимирович

студент

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [s.v.moiseev@gmail.com](mailto:s.v.moiseev@gmail.com)

Пусть  $N$  – множество всех пороговых булевых функций, вычисляемых с единичной задержкой, рассматриваемые как автоматные отображения. Пусть  $[ ]$  – оператор замыкания относительно суперпозиции и обратной связи на множестве автоматных отображений. Элементы множества  $[N]$  будем называть *нейроавтоматными* отображениями. Основная задача – построение критерия нейроавтоматности. Назовём отношение  $R \subseteq \{0,1\}^m$  *перестановочным*, если для любого натурального  $k$  для любых  $\langle a_1^0, \dots, a_1^{m-1} \rangle, \dots, \langle a_k^0, \dots, a_k^{m-1} \rangle \in R$  и любых перестановок  $\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1} : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  найдётся  $i \in \{1, \dots, k\}$ , такое что  $\langle a_{\sigma_0(i)}^0, \dots, a_{\sigma_{m-1}(i)}^{m-1} \rangle \in R$ . В пороговой логике известно, что булева функция порога тогда и только тогда, когда она перестановочна. Автоматом называется  $\Delta = \langle A, Q, B, \varphi, \psi, q_0 \rangle$ , где  $\varphi : A \times Q \rightarrow Q$ ,  $\psi : A \times Q \rightarrow B$ ,  $q_0 \in Q$ ; все состояния предполагаются достижимыми. Пусть  $L(\Delta) \subseteq A^*$  – все слова, переводимые автоматом в слова, оканчивающиеся на 1. Автоматное отображение, порожаемое автоматом  $\Delta$ , обозначим через  $f_\Delta$ . Пусть  $Z_c$  – автомат-задержка с первым выходом  $c$ , а  $\chi_P : \{0,1\}^m \times U \rightarrow \{0,1\}$  – функция-индикатор отношения  $P \subseteq \{0,1\}^m \times U$ . А-отображение  $g$  называется отображением *с задержкой*, если  $g = Z_c h$  для некоторого  $c$  и автоматного отображения  $h$ . Пусть также  $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ .

### Теорема 1.

Пусть  $\Delta = \langle \{0,1\}^m, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0 \rangle$ . Следующие утверждения равносильны:

1. Отображение  $f_\Delta$  нейроавтоматно.
2. Существуют  $c \in \{0,1\}$ , перестановочное  $P \subseteq \{0,1\}^m \times U$  и автоматное отображение с задержкой  $g : (\{0,1\}^\omega)^m \rightarrow U^\omega$ , такие что  $f_\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = Z_c \chi_P(\alpha_1, \dots, \alpha_m, g(\alpha_1, \dots, \alpha_m))$ .
3. Существует перестановочное  $P \subseteq \{0,1\}^m \times U$  и такое семейство регулярных множеств  $L_u (u \in U)$ , что  $L(f_A) \setminus A = \bigcup_{u \in U} L_u \cdot \{a \in A \mid \langle a, u \rangle \in P\} \cdot A$ .
4. Функция  $\psi$  существенно зависит только от состояния автомата, и отношение  $\{\langle a^0, \dots, a^{m-1}, q \mid \psi\varphi(\langle a^0, \dots, a^{m-1} \rangle, q) = 1\}$  перестановочно.

Пусть  $\lambda : A \rightarrow \tilde{A} \subseteq \{0,1\}^m$ ,  $\nu : B \rightarrow \tilde{B} \subseteq \{0,1\}^p$  – взаимно-однозначные соответствия. Скажем, что автоматное отображение  $f : A^\omega \rightarrow B^\omega$  *нейропредставимо* в кодировке  $\langle \lambda, \nu \rangle$ , если существуют нейроавтоматные отображения  $g^0, \dots, g^{p-1} : (\{0,1\}^\omega)^m \rightarrow \{0,1\}^\omega$ , такие что для всех  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  и  $\alpha \in A^\omega$  имеет место равенство  $\nu^k f(\alpha) = g^k \lambda(\alpha)$ .

### Теорема 2.

Пусть  $\Delta = \langle \{0,1\}^m, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0 \rangle$ ,  $\lambda : A \rightarrow \tilde{A} \subseteq \{0,1\}^m$ ,  $\nu : B \rightarrow \tilde{B} \subseteq \{0,1\}^p$  – взаимно-однозначные соответствия. Следующие утверждения равносильны:

1. Функция  $f$  нейропредставима в кодировке  $\langle \lambda, \nu \rangle$ .
2. Функция  $\psi$  существенно зависит только от состояния автомата, и для каждого

$k \in \{0, \dots, p-1\}$  существует перестановочное отношение  $P_k \subseteq \{0,1\}^m \times Q$ , такое что  $\forall a \in A \forall q \in Q \quad v^k \psi \varphi(a, q) = \chi_{P_k}(\lambda a, q)$ .

### Теорема 3.

Пусть  $A = \langle \{0,1\}^m, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0 \rangle$ . Следующие утверждения равносильны:

1. Существует кодировка  $\langle \lambda, \nu \rangle$ , в которой функция  $f_A$  нейропредставима.
2. Функция  $\psi$  существенно зависит только от состояния автомата, и  $\forall b_1, b_2 \in B \exists M \subseteq B$ , такое что, во-первых,  $(b_1 \in M \wedge b_2 \notin M) \vee (b_1 \notin M \wedge b_2 \in M)$ , а во-вторых, отношение  $\{\langle a^0, \dots, a^{m-1}, q \rangle \mid \psi \varphi(\langle a^0, \dots, a^{m-1} \rangle, q) \in M\}$  перестановочно.

### О распределении чисел с двоичным разложением специального вида в арифметических прогрессиях

*Науменко Антон Павлович*

*студент*

*Белгородский государственный университет, Белгород, Россия*

[Gritsenko@bsu.edu.ru](mailto:Gritsenko@bsu.edu.ru)

Рассмотрим представление натурального числа  $n$  в двоичной системе счисления:

$$n = w_0 2^0 + w_1 2^1 + \dots + w_k 2^k, \quad w_j = 0, 1, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Если среди чисел  $w_1, \dots, w_k$  четное число 1, отнесем число  $n$  к классу  $N_0$ , в противном случае – к классу  $N_1$ .

Пусть  $J_0(X, m, l)$  - число чисел из класса  $N_0$ , не превосходящих  $X$  и сравнимых с  $l$  по модулю  $m$ .

В 1968 г. А.О. Гельфонд получил для  $J_0(X, m, l)$  асимптотическую формулу

$$J_0(X, m, l) = \frac{X}{2m} + O(X^\lambda), \quad (1)$$

где  $\lambda = \frac{\ln 3}{\ln 4} = 0,79\dots$

Мы уточняем эту формулу в следующих частных случаях:

1)  $m = p^\alpha$ , где  $\alpha \geq 1$ ,  $p$  - произвольное нечетное простое число такое, что 2 является первообразным корнем по модулю  $p^\alpha$ .

2)  $m = p$ ,  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , 2 принадлежит показателю  $\frac{p-1}{2}$  по модулю  $p$ .

В обоих указанных случаях получены формулы вида

$$J_0(X, m, l) = \frac{X}{2m} + O\left(3^{\frac{\varphi(m)}{2}} X^\eta\right), \quad (2)$$

где  $\eta = \frac{\log_2 p}{p-1}$ . Постоянная в знаке  $O$  абсолютная.

Необходимо отметить, что при  $m < \ln X$  остаточный член в формуле (2) точнее остаточного члена в асимптотической формуле Гельфонда. Например, если  $p$  - константа

такая, что  $\frac{\log_2 p}{p-1} < \varepsilon$ , то при достаточно больших  $X$  имеем

$$J_0(X, m, l) = \frac{X}{2m} + O(X^\varepsilon),$$

константа в знаке  $O$  зависит только от  $m$ .

### **Свойство Банаха-Сакса в пространствах с симметричным базисом**

**Новикова Анна Игоревна**

*аспирант*

*Воронежского Государственного университета, математического факультета,*

*Воронеж, Россия*

*E-mail: annnovikova@mail.ru*

Говорят, что банахово пространство  $E$  обладает  $p$ -свойством Банаха-Сакса,  $p \geq 1$ , если всякая слабо сходящаяся к 0 последовательность  $\mathbf{x}_k \in E$ , содержит

подпоследовательность  $\mathbf{x}_{n_k}$  такую, что  $\left\| \sum_1^m \mathbf{x}_{n_k} \right\| \leq C m^{\frac{1}{p}}$  для всех  $m=1,2,\dots$ . Множество

тех  $p \geq 1$ , для которых  $E$  обладает  $p$ -свойством Банаха-Сакса обозначается через  $\gamma(E)$ . Ясно,  $1 \in \gamma(E)$  и  $\gamma(E)$  имеет вид  $[1, \gamma]$  или  $[1, \gamma)$  для некоторого  $\gamma$  из  $[1, \infty]$ . Число  $\gamma$  называется индексом Банаха-Сакса.

Среди пространств с симметричным базисом только  $\mathbf{l}_1$  и  $\mathbf{c}_0$  имеют бесконечный индекс Банаха-Сакса. Индекс пространств  $\mathbf{l}_{p,q}$  равен  $\min(p,q)$  для  $1 < p, q < \infty$ . Существует рефлексивное пространство с симметричным базисом, не обладающее свойством Банаха-Сакса.

Исследуются также пространства  $E$  с симметричным базисом, обладающие свойством  $\frac{1}{\gamma(E)} + \frac{1}{\gamma(E^*)} = 1$ . Среди пространств, не содержащих подпространств изоморфных  $\mathbf{l}_1$ , таким свойством обладают только  $\mathbf{l}_p, 1 < p < \infty$ .

### **Построение неограниченных, имеющих счетное число ударных волн, решений задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными**

**Орлова Мария Владимировна**

*студент*

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: mvorlova@gmail.com*

Рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка на функцию  $u = u(t, x)$

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (1)$$

где функция потока  $f(u)$  является степенной

$$f(u) = \frac{1}{p} |u|^{p-1} u, \quad p > 1$$

Начальное условие также является степенной функцией

$$u|_{t=0} = |x|^\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Отметим, что в рассматриваемой задаче начальные условия неограниченные, поэтому задача не укладывается в рамки теории ограниченных обобщённых решений задачи Коши для уравнения (1), развитой в работах Е.Хопфа, О.А.Олейник, С.Н.Кружкова.

**Теорема.** Пусть выполнено условие  $\alpha(p-1) > 1$ . Тогда во всей полуплоскости  $t > 0$  существует обобщенное (в смысле распределений) решение задачи (1), (2). Это решение имеет счетное число разрывов первого рода на кривых

$$x = -C_k t^\beta, \quad \beta = \frac{1}{1 - \alpha(p-1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad C_k \rightarrow +\infty.$$

Все разрывы построенного решения являются энтропийными.

Решение строится следующим образом: продолжая по характеристикам начальные условия, получаем классическое решение задачи Коши в области  $x > -C_1 t^\beta$ . Предел этого решения на кривой  $x(t) = -C_1 t^\beta, t > 0$ , являющейся огибающей семейства характеристик, обозначим через  $u^+$ , а через  $u^-$  - значение решения с другой стороны этой кривой, которое однозначно определяется из условия Ранкина-Гюгонио

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}.$$

Новые полученные «начальные условия» задают новое семейство характеристик, по которым решение продолжается до следующей огибающей  $x = -C_2 t^\beta$  нового семейства характеристик, и так далее. На линиях разрыва условие возрастания энтропии оказывается выполненным автоматически.

## О линейности области сумм интегрального аналога ряда Корнилова

**Осипов Олег Сергеевич**

аспирант

Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: [ososipov@sibmail.com](mailto:ososipov@sibmail.com)

Пусть  $X$  – банахово пространство,  $L[0, +\infty)$  –  $\sigma$ -алгебра Лебега подмножеств множества  $[0, +\infty)$ ,  $\mu$  – мера Лебега, отображение  $x: [0, +\infty) \rightarrow X$  таково, что существует

$$\text{несобственный интеграл } \int_0^{+\infty} x(t) dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x(\tau) d\tau.$$

Измеримая биективная функция  $\pi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  называется перестановкой несобственного интеграла  $\int_0^{+\infty} x(t) dt$  на множестве  $[0, +\infty)$ , если функция  $\pi^{-1}$  измерима и

$\mu(\pi A) = \mu A$  для любого множества  $A \in L[0, +\infty)$ . Областью сумм интеграла  $\int_0^{+\infty} x(t) dt$  называется множество таких  $y \in X$ , что при некоторой перестановке  $\pi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  выполнено равенство  $\int_0^{+\infty} x(\pi(t)) dt = y$ .

Пусть  $\Delta_{n,i} = \left[ \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right)$  для натуральных  $n$  и для  $i = 1, 2, \dots, 2^n$ . Пусть  $\psi_n : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  и система  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  является системой независимых равномерно распределенных функций. Определим в пространстве  $L_p[0, 1)$ ,  $p \geq 1$ , систему функций

$$\varphi_{n,i}^+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \psi_n^{-1}(\Delta_{n,i}) \\ 0, & \xi \in [0, 1) \setminus \psi_n^{-1}(\Delta_{n,i}) \end{cases}$$

и  $\varphi_{n,i,j}^-(\xi) = -\varphi_{n,i}^+(\xi)\varphi_{n+1,j}^+(\xi)$  при  $n = 1, 2, \dots$ ;  $i = 1, 2, \dots, 2^n$  и  $j = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$ . В работе Корнилова П.А. [1] доказано, что область сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{2^n} \left( \varphi_{n,i}^+ + \sum_{j=1}^{2^{n+1}} \varphi_{n,i,j}^- \right) \right]$$

равна множеству  $\{0, 1\}$ . Логично предположить, что область сумм его интегрального аналога также состоит из двух точек. Но это не так.

**Теорема.** Пусть  $p \geq 1$  и отображение  $x : [0, +\infty) \rightarrow L_p[0, 1)$  задано по правилу:

$x(t) = \varphi_k$  при  $t \in [k-1, k)$ , где  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда область сумм интеграла  $\int_0^{+\infty} x(t) dt$  в пространстве  $L_p[0, 1)$  равна множеству действительных постоянных функций, определенных на промежутке  $[0, 1)$ .

## Критические многогранники

**Панов Михаил Сергеевич**

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [panov\\_ms@mail.ru](mailto:panov_ms@mail.ru)

## Введение

Данная работа посвящена вопросам, связанным с известной гипотезой теории выпуклых многогранников —  $3^d$ -гипотезой. Рассматривается класс аффинных типов всех выпуклых  $d$ -мерных центрально-симметричных многогранников и определяется число  $m$  — точная нижняя грань числа всех граней таких многогранников.  $3^d$ -гипотеза предполагает, что  $m = 3^d$ . Совершенно очевидным представляется, что для любой размерности  $d$  выполнено  $m \leq 3^d$ , достаточно для примера взять  $d$ -мерный куб, для которого полное число граней в точности равняется  $3^d$ . Наиболее значительные результаты в проверке  $3^d$ -гипотезы принадлежат Р.Стенли. В своей работе он при использовании алгебраических методов доказал справедливость утверждения гипотезы для таких центрально-симметричных многогранников, у которых все грани являются симплексами, а также для простых центрально-симметричных многогранников. Однако метод Р.Стенли не дал результатов в общем случае.

Наряду с самой  $3^d$ -гипотезой возникают еще и смежные задачи. Например, как описать класс таких аффинных типов  $d$ -мерных центрально-симметричных многогранников, у которых общее число граней в точности равняется  $3^d$  (будем называть такие аффинные типы *критическими*)? Верно ли, что разным критическим типам соответствуют разные  $f$ -векторы? Какие операции над многогранниками сохраняют свойства критичности? Очевидно, что тип, двойственный критическому, тоже критический. Кроме того, прямое произведение двух многогранников критического типа дает многогранник критического типа. Д.Калаи предположил, что все критические типы могут быть получены из многомерных кубов с помощью прямого произведения и взятия дуального. Наряду с этим, Н.П.Долбилин, на основе некоторого обобщения бипирамид над многогранниками, предложил конструкцию подкласса класса критических аффинных типов многогранников. Этот подкласс будем называть *примарными аффинными типами*.

#### **Методы и результаты.**

В работе представлено точное определение класса примарных типов многогранников, с помощью специально введенной операции «крест» и операции прямого произведения. На основе взаимосвязи этих двух операции и операции взятия дуального типа показывается, что класс примарных типов эквивалентен классу, предложенному Калаи. Кроме того, предложен алгоритм построения всех примарных типов многогранников заданной размерности. Приводятся данные результата выполнения этого алгоритма на ЭВМ для первых 19 размерностей. Также с помощью компьютерных вычислений для первых 17 размерностей была проверена гипотеза о том, что все  $f$ -векторы примарных типов различны.

#### **Слабые решения суперпсевдодифференциальных уравнений.**

***Панюнин Никита Михайлович***

*аспирант*

*МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия*

*E-mail: nikita@etudes.ru*

В работе рассматривается модель бесконечномерного суперпространства, предложенная А.Ю.Хренниковым. Для пары  $P, Q$  двойственных суперпространств определяется фазовое суперпространство  $P \times Q$ . На  $P \times Q$  рассматривается пространство  $A(P \times Q)$  компактно суперцелых функций. Суперпсевдодифференциальные операторы с символами  $a(\cdot, \cdot)$  из  $A(P \times Q)$  определяются с помощью супермеры Фейнмана  $\Phi$ :  $(\hat{a}f)(q) = \int_{Q \times P} a(q, p) f(q_1) \Phi(dq_1 dp)$ . Основным результатом работы касается построения слабых решений задачи Коши для суперпсевдодифференциальных уравнений.

#### **Литература**

1. А.Ю.Хренников. Суперанализ. --- М.:Физматлит, 2005

**О решении одного класса стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа**

**Парамошина Ирина Геннадьевна**

аспирант

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

E-mail: [paramoschina@mail.ru](mailto:paramoschina@mail.ru)

В работе рассматривается задача Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с одномерным винеровским процессом

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Au(t, x) + f(t, x, u(t, x)) + b(t, x, u(t, x)) \frac{\partial w(t)}{\partial t}, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

где  $x \in R^n$ ,  $w(t)$  - винеровский процесс, производная  $\frac{\partial w(t)}{\partial t}$  понимается в смысле

Стратоновича,  $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n d_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$  - эллиптический оператор второго

порядка с предсказуемыми коэффициентами  $a_{ij}(t, x)$ ,  $d_i(t, x)$ . Эта модель, в частности, используется в генетике и химии [1], [2]. Так, уравнение, связанное с моделью роста популяции в случайной среде, введенное Dawson и Salehi [3], имеет вид

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \sigma u(t, x) \frac{\partial w(t)}{\partial t},$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа, производная  $\frac{\partial w(t)}{\partial t}$  понимается в смысле Стратоновича.

С помощью методов, приведенных в работе [4], показано, что при определенных условиях гладкости коэффициентов, решение таких уравнений представляется в виде  $u(t, x) = \phi(t, w(t) + C(t, x))$ , где  $\phi(t, v)$  и  $C(t, x)$  - гладкие случайные функции.

Функции  $\phi(t, v)$  и  $C(t, x)$  определяются из цепочки двух соотношений, построенных по коэффициентам исходного уравнения. Первое соотношение  $\int \frac{d\phi}{b(t, x, \phi)} = v + C(t, x)$  позволяет представить решение уравнения в неявном виде  $\phi(t, w(t) + C(t, x))$ . Функция  $C(t, x)$ , в свою очередь, определяется из уравнения

$$C'_i(t, x) = \frac{\tilde{A}C(t, x) + f(t, x, \phi(t, g)) - \phi'_i(t, g)}{b(t, x, \phi)}, \quad \text{где}$$

$$\tilde{A}C(t, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) b(t, x, \phi) C''_{x_i x_j}(t, x) + \sum_{i=1}^n \left( d_i(t, x) b(t, x, \phi) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) b'_{x_j}(t, x, \phi) \right) C'_{x_i}(t, x),$$

$$\phi = \phi(t, w(t) + C(t, x)), \quad \phi(0, w(0) + C(0, x)) = u_0(x), \quad g = w(t) + C(t, x).$$

**Аксиоматизируемость класса регулярных чу-полигонов**

**Первухин Михаил Александрович**

аспирант

Дальневосточный государственный университет, Владивосток, Россия

E-mail: [mike38@math.dvgu.ru](mailto:mike38@math.dvgu.ru)

В данной работе обобщается теорема об аксиоматизируемости класса регулярных полигонов (см. [1]) на случай чу-полигонов. Напомним некоторые определения. Пусть  $S$  - частично упорядоченный моноид (чу-моноид). *Левым частично упорядоченным  $S$  - полигоном над  $S$  (или, просто, чу-полигоном)* называется частично упорядоченное

множество  $A$ , на котором определено действие моноида  $S$ , причем единица  $S$  действует на  $S$  тождественно и  $a \leq a'$  влечет  $sa \leq sa'$ , а  $s \leq t$  влечет  $sa \leq ta$  для любых  $a, a' \in A$  и  $s, t \in S$ . Такой чу-полигон будем обозначать  ${}_s A$ .

Пусть  ${}_s A$  – чу-полигон. Элемент  $a \in A$  называется *регулярным*, если существует морфизм  $f: Sa \rightarrow S$  такой, что  $f(a)a = a$ . Чу-полигон  ${}_s A$  называется *регулярным* (см. [2]), если все элементы  ${}_s A$  регулярны. Через  $R$  будем обозначать объединение всех регулярных чу-подполигонов чу-полигона  ${}_s S$ .

**Теорема.** Класс  $\mathfrak{R}$  регулярных чу-полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда

1) частично упорядоченная полугруппа  $R$  удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами;

2) для любых  $n \geq 1$ ,  $s_i, t_i \in S$  ( $1 \leq i \leq n$ ) множество  $\{x \in R \mid \bigwedge_{i=1}^n s_i x \leq t_i x\}$  пусто или конечно-порождено как правый идеал частично упорядоченной полугруппы  $R$ .

## Разрешимость краевых задач для параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции с нелокальными начальными данными

*Пинигина Нюргуяна Романовна*

*доцент*

*Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия*

*E-mail: n-pinig@mail.ru*

В работе устанавливается разрешимость краевых задач для некоторых классов уравнений, имеющих вид

$$\operatorname{sgn} x u_t + Lu = f \quad (1)$$

где  $Lu = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( k(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c(x, t)u$ ,  $k(x, t) \geq \delta > 0$ ,  $c(x, t) < 0$ .

Решение уравнения ищется из пространства Гельдера  $H_{x,t}^{p,p/4}$ ,  $p = 4l + \gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , удовлетворяющее нелокальным начальным данным

$$\begin{aligned} u(x, 0) + r_1(x)u(x, T) &= \varphi_1(x), & x > 0 \\ u(x, T) + r_2(x)u(x, 0) &= \varphi_2(x), & x < 0, \quad |r_i| < 1 \end{aligned} \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0; t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0; t) \quad (3)$$

где  $\sigma_k$  – действительные постоянные,  $l \geq 1$  – целое число.

Результатом данной работы является исследование гладкости решений для уравнения (1) в случае нелокальных начальных данных и общих условий склеивания на линии  $x = 0$ . Для доказательства единственности и существования решения поставленной задачи использованы методы теории дифференциальных уравнений параболического типа, теории функций и теории интегральных уравнений [1]. Подобные задачи для уравнений второго порядка рассматривались в работе [2].

**Теорема:** Пусть  $\varphi_i, k_i \in H^p$ ,  $i = 1, 2$  ( $p = 4l + \gamma$ ). Тогда при выполнении  $4l$  условий вида

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2) = 0 \quad (4)$$

Существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства

- 1)  $H_{x_t}^{p,p/4}$ , если  $0 < \gamma < 1 - 4\theta$ ,
- 2)  $H_{x_t}^{q,q/4}$ ,  $q = 4l + 1 - 4\theta$  если  $1 - 4\theta < \gamma < 1$
- 3)  $H_{x_t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}$ , если  $\gamma = 1 - 4\theta$ , где  $\varepsilon$  – сколь угодно малая положительная постоянная,

где  $\theta = \frac{1}{\pi} \arctg \left| \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{4}$ ,  $a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3$ ,

$$b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1$$

**Замечание:** Если выполнены условия теоремы при  $\theta \geq \frac{1}{4}$ , то единственное решение задачи (1)-(3) будет существовать при выполнении  $6l + 2$  условий вида (4).

### **Подклассы легко решаемых задач для задачи о F-выполнимости булевых формул**

*Поцелуевская Евгения Александровна*

*аспирантка*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: potseluevskaya@gmail.com*

#### **Введение**

На сегодняшний день в основе многих систем обеспечения информационной безопасности лежат различные NP-полные задачи, не решаемые в общем случае за полиномиальное время. Одной из них является проблема формульной выполнимости, используемая в системах парольной защиты. Однако, несмотря на то, что в общей постановке данная задача не может быть решена за полиномиальное время, для неё могут быть выявлены подклассы задач, решаемых за полиномиальное время с большой вероятностью. Выявление подобных случаев равносильно определению слабых мест в системе защиты, которые могут быть использованы злоумышленником для проникновения в информационную систему.

#### **Постановка задачи**

В общем случае задача о F-выполнимости булевых формул ставится следующим образом. Пусть  $F = \{F_1, \dots, F_l\}$  - любое конечное множество формул (функциональных символов). Определим F-формулу как конъюнкцию  $F_{i_1}(\cdot)F_{i_2}(\cdot) \dots F_{i_k}(\cdot)$  с переменными  $x_1, \dots, x_n$ , расставленными некоторым образом. Проблема F-выполнимости - это проблема выполнимости F-формулы.

#### **Методы**

Основным методом исследования данного вопроса послужило введение дополнительных ограничений на заданные функции, позволяющих решать поставленную задачу за полиномиальное время. Был рассмотрен случай, когда все функции  $F_{i_k}$  зависят от трех переменных и заданы таблицей истинности. Для этого случая разработан алгоритм, сочетающий в себе перебор определенного подмножества S переменных  $x_i$  и решение для каждого фиксированного набора значений переменных из S полиномиальной подзадачи о 2-выполнимости. В соответствии с данным алгоритмом разработана программа, получающая на вход функции  $F_{i_1}(\cdot), F_{i_2}(\cdot), \dots, F_{i_k}(\cdot)$  и порядок расстановки переменных  $x_1, \dots, x_n$ , и выдающая ответ, выполняема ли данная формула, и время работы программы.

## Результаты

В случае, когда для количества перебираемых переменных  $m$  верно  $m \leq \log_2 |x|$ , где  $|x|$  – длина входных данных алгоритма, алгоритм решает поставленную задачу за полиномиальное время. В случае же  $m > \log_2 |x|$  алгоритм, вообще говоря, не является полиномиальным. Однако значительный объем накопленных статистических данных показывает, что при таких  $m$  в среднем данный алгоритм также решает задачу быстро.

### Модификации теста Лайта для проверки соотношений в алгебраических структурах

*Правильникова Валерия Владимировна*

*Студентка*

*Липецкий государственный технический университет,  
факультет автоматизации и информатики, Липецк, Россия*

*E-mail: [leca@lipetskl.ru](mailto:leca@lipetskl.ru)*

Для проверки соотношений между элементами алгебраических структур, а именно группоидов и бигруппоидов [1], необходимы некоторые рациональные подходы, которые бы позволили ускорить этот процесс, уменьшить количество производимых вычислений, по сравнению с методом простого перебора.

Поэтому целью данной работы является модификация теста Лайта для соотношения ассоциативности конечного группоида, предложенного ученым в 1949 году, для проверки других соотношений [2,3] между элементами алгебраических структур методом вычислений и умозаключений.

В ходе исследования были рассмотрены произвольные конечные группоиды, бигруппоиды и выполнение над их элементами некоторых соотношений, таких как левая и правая автодистрибутивность, медиальность, левая и правая дистрибутивность. Рассмотрим конечный группоид  $G = \langle S, \bullet \rangle$  и выполнение над его элементами соотношения медиальности:  $(ab)(cd) = (ac)(bd)$ . Пусть  $a$  и  $b$  – такие элементы из  $S$ , что  $(ax)(yz) = (ay)(xz)$  и  $(bx)(yz) = (by)(xz)$  для всех  $x, y \in S$ . Потребуем выполнения коммутативности для  $S$   $xy = yx$ . Тогда:  $((ab)x)(yz) = ((ab)x)y)z = ((ab)(xy))z = ((ab)(yx))z = (((ab)y)x)z = (((ab)y)(xz))$ . То есть, если в группоиде медиальность выполняется для порождающих элементов (при условии коммутативности), то соотношение справедливо для структуры в целом. Рассмотрим две операции  $(*)$  и  $(\circ)$ , определенные в  $S$  следующим образом:  $x * y = (ax)(yz)$ ,  $x \circ y = (ay)(xz)$ . Медиальность выполняется в  $S(\bullet)$  тогда и только тогда, когда для каждого фиксированного элемента  $a \in S$  эти две операции совпадают. Аналогичные рассуждения применим и для остальных соотношений.

Таким образом, в ходе исследования по аналогии с тестом Лайта для ассоциативности был предложен подход для тестирования некоторых соотношений алгебраических структур, доказана необходимость проверки соотношений только для порождающих множество элементов. Также ускорить процесс проверки позволяют взаимосвязи между аксиомами и свойствами элементов алгебраических структур, некоторые из которых описаны и доказаны в [4].

Дальнейшие исследования будут направлены на совершенствование описанного метода, на поиск других способов проверки аксиом и свойств элементов в алгебраических структурах, на создание компьютерных программ для тестирования законов.

Результаты, полученные в ходе исследования, могут применяться для решения задач искусственного интеллекта.

**Оценки производительности двумерной стохастической модели маршрутизатора в сети ТСР**

**Прохоренков Сергей Павлович**

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [msu-serg@yandex.ru](mailto:msu-serg@yandex.ru)

Данный доклад посвящен изучению алгоритма AIMD (Additive Increase Multiplicative Decrease), который используется для распределенного управления доступом к ресурсам инфраструктуры современных сетей передачи данных. Источник данных под управлением данного алгоритма линейно увеличивает скорость отправки данных, а, получив сведения об их потере, умножает текущее значение скорости на коэффициент  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

Различные аспекты производительности [1] алгоритма AIMD являются объектом интенсивных исследований в течение последних 15 лет. Большинство работ, рассматривающих вероятностные модели систем такого типа, посвящено анализу пропускной способности, демонстрируемой одним источником для различных классов потоков потерь данных (см., например, [2]). Ряд работ также исследует функционирование двух и более источников в локальной сети специального вида. В частности, в работах [3,4] получен ряд качественных свойств системы, состоящей из одного маршрутизатора и множества источников.

Данный доклад посвящен изучению новой вероятностной модели системы, описывающей взаимодействие нескольких источников данных, разделяющих некоторый общий сетевой ресурс. Направляясь на общий маршрутизатор, различные потоки данных конкурируют между собой с целью получения более широкого "окна" (количества пакетов, передаваемых потоком в единицу времени), так как суммарная пропускная способность маршрутизатора ограничена некоторым значением  $K$ . Одним из достоинств данной модели является то, что для нее могут быть найдены в явном виде показатели производительности для стационарного режима. Данные показатели имеют вид математических ожиданий вычисленных по стационарному распределению. Для случая двух источников найдена стационарная мера и вычислены показатели производительности, а именно, параметры эффективности ( $efficiency = \frac{(1+\alpha)K}{(3+\alpha)\sqrt{2}}$ ) и справедливости ( $fairness = \frac{(1-\alpha)(1+\alpha^2)K^2}{4(3+\alpha)}$ ).

**Регуляризация измеримых функций**

**Ремизов Иван Дмитриевич**

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [ivremizov@yandex.ru](mailto:ivremizov@yandex.ru)

Локально интегрируемой на  $R^n$  функции  $f$  можно сопоставить линейный непрерывный функционал на пространстве пробных функций  $D$  (обобщенную функцию), ставящий пробной функции  $g$  в соответствие интеграл от  $fg$ . В случае, когда  $f$  измерима, но не интегрируема, естественная область определения этого функционала - линейное подпространство  $L_f$  в пространстве пробных функций. В докладе продолжается начатое в [1] обсуждение вопросов, связанных с возможностью продолжения указанного функционала до непрерывного линейного функционала на всем пространстве пробных функций, т.е. о построении так называемой регуляризации функции  $f$ .

Основные освещаемые в докладе результаты состоят в следующем:

1. Построены примеры, показывающие, что множество, на котором измеримая функция на конечномерном пространстве функция интегрируема по Лебегу, и объединение всех открытых шаров, на которых она интегрируема по Лебегу, могут находиться в общем положении.

2. Доказано, что пространство  $L_f$  либо тривиально, либо бесконечномерно.

3. Доказано, что если дополнение к объединению всех шаров, на которых  $f$  интегрируема, ограничено, то из замкнутости всех пересечений  $L_f$  с пространствами пробных функций с носителями внутри шара натурального радиуса следует замкнутость  $L_f$  в пространстве всех пробных функций.

### **Движение равномерно нагретой аэрозольной частицы сферической формы в вязкой газообразной среде**

**Рязанов Константин Сергеевич**

*аспирант*

*Белгородский государственный университет, Белгород, Россия*

*E-mail: [rksb@rambler.ru](mailto:rksb@rambler.ru)*

Одной из основных проблем физики аэродисперсных систем, активно разрабатываемой как в нашей стране, так и за рубежом, является проблема теоретического описания поведения взвешенных в газообразных средах частиц. Без знания закономерностей этого поведения невозможно математическое моделирование эволюции аэродисперсных систем и решение такого важного вопроса как целенаправленное воздействие на аэрозоли.

В приближении Стокса проведено теоретическое описание стационарного движения равномерно нагретой аэрозольной частицы сферической формы в вязкой газообразной среде. При рассмотрении движения предполагается, что средняя температура поверхности частицы может существенно отличаться от температуры окружающей ее среды. Под относительным перепадом температуры понимают отношение разности между температурой поверхности частицы  $T_s$  и температурой области вдали от нее  $T_\infty$  к последней, то есть величину  $(T_s - T_\infty)/T_\infty$ . Относительный перепад температуры считается малым при  $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$  и большим в противном случае.

В процессе решения газодинамических уравнений получено аналитическое выражение для силы сопротивления и скорости гравитационного падения равномерно нагретой твердой сферической частицы, с учетом зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Такая ситуация возникает, например, при описании движения частиц в разнотемпературных каналах, при анализе процессов переноса в зоне протекания химических реакций, при зондировании облаков и туманов лазерным излучением и т.д. В работе используется степенной вид их зависимости [1]

$$\mu_e = \mu_{e\infty} \left( \frac{T_e}{T_{e\infty}} \right)^\beta, \quad \lambda_e = \lambda_{e\infty} \left( \frac{T_e}{T_{e\infty}} \right)^\alpha, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1,$$

где  $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$ ,  $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$ ,  $\mu_e$  и  $\lambda_e$  – коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газообразной среды соответственно,  $T_e$  – температура газа.

Как показали численные оценки, нагрев поверхности частицы существенно влияет на силу сопротивления и скорость ее гравитационного падения [2].

### О представлении регулярных языков параллельными автоматами.

**Самоненко Илья Юрьевич**

аспирант

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [samonenko@yandex.ru](mailto:samonenko@yandex.ru)

Под мультимножеством будем понимать неупорядоченное множество с повторяющимися элементами. Мультимножество с элементами  $x_1, \dots, x_n$  обозначим через  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Пусть  $X$  - некоторое множество. Обозначим  $T_1(X, s) = \{\{x_1, \dots, x_s\} \mid x_i \in X\}$ ,  $T_2(X, s) = \{\langle x_1, \dots, x_s \rangle \mid x_i \in X\}$  и  $T_3(X, s) = \{(x_1, \dots, x_s) \mid x_i \in X\}$ . Обозначим  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,

$$H_n^k = C_{n+k-1}^k \text{ и } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пусть  $V = (A, Q, \varphi)$  - конечный автомат (переходная система), где  $A$  - входной алфавит,  $Q$  - множество состояний и  $\varphi$  - функция перехода [1]. Определим три способа возведения автомата  $V$  в степень  $s$ :  $P_i(V, s) = (A, T_i(X, s), \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где функции переходов определены следующим образом:  $\varphi_1(\{q_1, \dots, q_s\}, a) = \{\varphi(q_1, a), \dots, \varphi(q_s, a)\}$ ,  $\varphi_2(\langle q_1, \dots, q_s \rangle, a) = \langle \varphi(q_1, a), \dots, \varphi(q_s, a) \rangle$  и  $\varphi_3((q_1, \dots, q_s), a) = (\varphi(q_1, a), \dots, \varphi(q_s, a))$ . Через  $Q(V)$  - обозначим множество состояний автомата  $V$ . В работе рассмотрена задача представления регулярных языков автоматами вида  $P_i(V, s)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Через  $L(V, q, F)$  - обозначим регулярный язык представимый в автомате  $V$  с начальным состоянием  $q \in Q(V)$  и множеством финальных состояний  $F \subseteq Q(V)$ . Через  $L(V) = \{L(V, q, F) \mid q \in Q(V), F \subseteq Q(V)\}$  - обозначим множество всех языков представимых в автомате  $V$ . Пусть  $\Omega$  - некоторое множество автоматов, положим  $L(\Omega, n) = \max_{V \in \Omega, |Q(V)|=n} |L(V)|$  и  $L_i(\Omega, n, s) = \max_{V \in \Omega, |Q(V)|=n} |L(P_i(V, s))|$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Теорема 1.** Обозначим  $U(a, b) = (2^a - 2)b + 2$ , тогда при  $n \geq 3$

	$L(\Omega, n)$	$L_1(\Omega, n, s)$	$L_2(\Omega, n, s)$	$L_3(\Omega, n, s)$
$\Omega$ - множество групповых автоматов	$U(n, n)$	$U(C_n^s, C_n^s)$	$U(C_n^s, C_n^s)$	$U(A_n^s, A_n^s)$
$\Omega$ - множество всех автоматов	$U(n, n)$	$U(\sum_{t=1}^s C_n^t, C_n^s)$	$U(\sum_{t=1}^s H_n^t, C_n^s)$	$U(\frac{n^{s+1} - n}{n-1}, A_n^s)$

Пусть  $L$  - некоторый регулярный язык. Через  $V(L)$  и  $V_i(L)$  обозначим минимальное  $n$ , такое что, существует автомат  $V$  с  $n$  состояниями, такой что,  $L \in L(V)$  и  $L \in L(P_i(V, s))$  при некотором  $s$  соответственно.

**Теорема 2.** Для любого  $n \geq 3$  существуют такие регулярные языки  $L_0, L_1, L_2$  и  $L_3$  что: 1)  $V(L_0) = n, V_1(L_0) = n, V_2(L_0) = n, V_3(L_0) = n$

2)  $V(L_1) = 2^n - 1, V_1(L_1) = n$

$$3) V(L_2) = \frac{(n+1)C_{2n}^{n-1}}{n} - 1, V_2(L_2) = n$$

$$4) V(L_3) = n^n, V_3(L_3) = n$$

**Условия сильной разрешимости для одного класса нелинейных эволюционных уравнений**

**Сейткулов Ержан Нураханович**

*старший преподаватель*

*Евразийский национальный университет им М.В.Ломоносова, Астана, Казахстан*

*E-mail: [erj@mail.ru](mailto:erj@mail.ru)*

Пусть  $p \in (1, \infty), \theta \in (-\infty, +\infty), a \in (0, \infty)$ . Далее, пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство. Пусть  $C^\infty(H, 0, a)$  множество бесконечно гладких на  $[0, a], (a > 0)$ , функций со значениями в  $H$ . Через  $H_{p,\theta} = H_{p,\theta}[0, a]$  обозначим пространство, полученное пополнением множества  $C^\infty(H, 0, a)$  по норме

$$\|f\|_{H_{p,\theta}} = \left( \int_0^a |A^\theta f(\eta)|_H^p d\eta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t' + Au + B(u, u) = f(t), u(0) = 0, 0 < t < a, \quad (1)$$

где  $A$  – самосопряженный неотрицательный оператор с вполне непрерывным обратным,  $B(u, g)$  – билинейный оператор, а  $f \in H_{p,\theta}[0, a]$ .

Получены условия, при которых задача (1) сильно разрешима в целом.

**Выразимость в логике 2-го порядка: характеристика однозначно выразимых предикатов; описание предикатов, однозначно выразимых в языке без констант**

**Смелянский Дмитрий Михайлович**

*студент*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: [Soldm1@yandex.ru](mailto:Soldm1@yandex.ru)*

Язык логики предикатов 2-го порядка можно рассматривать как расширения языка логики предикатов 1-го порядка за счет введения предикатных переменных и кванторов по этим переменным. Система вывода для исчисления предикатов 2-го порядка также может быть построена как расширение некоторой системы вывода для исчисления 1-го порядка правилами и аксиомами для кванторов по предикатным переменным, аналогичными соответствующим правилам и аксиомам для кванторов по предметным переменным.

Под интерпретацией какого-либо языка логики предикатов 2-го порядка понимается система, состоящая из некоторой предметной области и множества определенных на ней предикатов (система областей), с выделенными элементами в качестве значений предметных и предикатных констант, если таковые имеются. Исчисление 2-го порядка корректно только относительно *правильных* интерпретаций, которые характеризуются

тем, что соответствующая система областей содержит предикат, выражаемый произвольной формулой языка этого исчисления. Относительно таких интерпретаций имеет место семантическая полнота.

Формула языка логики предикатов 2-го порядка может выражать множество предикатов. Формула, замкнутая по предикатным переменным, но содержащая свободные предметные переменные выражает единственный предикат (однозначная выразимость). Существует такое выражение для равенства.

Изоморфизмом двух интерпретаций называется биекция носителя одной интерпретации на носитель другой сохраняющее истинностные значения предикатов, и при котором значения констант соответствуют друг другу. При этом образ любого выразимого некоторой формулой предиката, выражается той же формулой, что и прообраз. Предикат однозначно выразим тогда и только тогда, когда он сохраняется при автоморфизме.

Отсюда следует, что если для любой пары кортежей одинаковой длины элементов носителя существует автоморфизм, переводящий один кортеж в другой, то однозначно выразимы будут только тождественно-истинный, тождественно-ложный предикат, равенство или неравенство или их конъюнкции.

В языке, не содержащем констант, можно написать формулу, выражающую в правильной интерпретации произвольную подстановку. Поэтому в таком языке нельзя определить других отношений, кроме описанных выше.

## О конструктивной характеристике пороговых функций

*Соколов Андрей Павлович*

*Аспирант*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

*E-mail:kernelian@mail.ru*

Пороговые функции алгебры логики представляют большой интерес в связи с простотой технической реализации, а также благодаря своим мощным вычислительным возможностям. Наиболее естественным способом задания пороговой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  является определение линейной формы вида:  $x_1 w_1 + \dots + x_n w_n - \sigma$ . При этом могут рассматриваться линейные формы, как с действительными, так и с целочисленными коэффициентами. В работе показывается, что выразительные возможности данных способов эквивалентны, т.е. любая пороговая функция  $f$  может быть задана некоторой линейной формой с целочисленными коэффициентами.

Вводится определение сигнатуры произвольной пороговой функции  $f$  как набор знаков коэффициентов и свободного члена некоторой линейной формы, задающей  $f$ . Доказано, что если  $f$  существенно зависит от всех своих переменных, то сигнатура  $f$  определяется однозначным образом. Следующая теорема обобщает данный результат и характеризует разбиение множества пороговых функций по классам сигнатур.

**Теорема 1.** Отношение равенства сигнатур разбивает множество существенных пороговых функций в точности на  $2^{n+1}$  взаимно не пересекающихся изоморфных класса, одним из которых является класс монотонных пороговых функций.

Далее в работе исследуется сложность преобразования одной пороговой функции, заданной целочисленной линейной формой, в другую. В качестве единицы меры сложности принимается изменение произвольного коэффициента или свободного члена линейной формы на единицу. Сложность преобразования пороговой функции  $f_1$  в

пороговую функцию  $f_2$  определяется как минимально-достаточное число изменений некоторой линейной формы, задающей функцию  $f_1$ , для получения линейной формы, задающей пороговую функцию  $f_2$ . Доказана теорема.

**Теорема 2.** Имеет место следующая оценка:

$$n + o(n) \leq \log \rho(n) \leq n \log n + o(n),$$

где  $\rho(n)$  - максимальная сложность преобразования одной пороговой функции в другую на всем множестве пороговых функций от  $n$  переменных.

В работе также рассматривается вопрос строения множеств  $U(f)$  - множество целочисленных линейных форм, задающих пороговую функцию  $f$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** Для любой пороговой функции  $f$  множество  $U(f)$  является бесконечно-порожденным относительно операции сложения линейных неравенств, а также содержит счетный базис, который определяется единственным образом. Существует алгоритм, эффективно перечисляющий данный базис.

## Теория устойчивости.

### Исследование траекторий в окрестности точки покоя.

*Соловьева Екатерина Вениаминовна*

*Студентка*

*Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, Россия.*

*E-mail: olenenok.85@mail.ru*

## Введение

Проблемы устойчивости возникли впервые в механике при изучении равновесных положений системы. Простое наблюдение показывает, что некоторые положения равновесия системы устойчивы к небольшим возмущениям, а другие принципиально возможные равновесные положения практически не могут быть реализованы. Со временем появились работы об устойчивости движения, но наиболее понятно и удачно теория устойчивости была изложена Л.М. Ляпуновым. Ему принадлежит постановка задачи об устойчивости движения по уравнениям первого приближения первого приближения, когда об устойчивости можно судить по линеаризованным уравнениям без необходимости привлечения к анализу точных уравнений, Он дал полное решение этой задачи. Также Л.М. Ляпунов предложил два основных метода исследования устойчивости движения, поставил вопрос об обратимости теорема Лагранжа и доказал её для двух частных случаев.

## Основная часть

Теория устойчивости имеет очень большую область применения, но в ряде вопросов возникает потребность, помимо исследования точки фазового пространства на устойчивость, выяснить также расположение траекторий в окрестности этой точки. Не ставя целью рассматривать этот вопрос во всей общности, ограничимся случаем  $n = 2$

(фазовая плоскость) и линейной системой уравнений с постоянными коэффициентами :

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Эта система обладает тривиальным решением  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . С кинематической точки зрения это состояние покоя, поэтому отвечающая этому решению точка  $(0, 0)$  фазовой плоскости называется точкой покоя.

Заметим, что фазовую траекторию системы (1) можно рассматривать как интегральную кривую уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2} \quad (2)$$

В точке  $(0, 0)$  правая часть уравнения (2) разрывна, т. е. нарушено условие теоремы существования и единственности. Точка  $(0, 0)$  является особой точкой. Поэтому априори через точку  $(0, 0)$  может не проходить ни одной интегральной кривой уравнения (2), а также может проходить более одной и даже бесконечно много интегральных кривых. Как будет показано, расположение траекторий в окрестности точки  $(0, 0)$  определяет как и свойство ее устойчивости или неустойчивости числами матрицы  $A$ .

Рассмотрим разные случаи.

а) Пусть характеристические числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны, различны и одного знака.

Положим для определенности  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  и  $\lambda_1 > \lambda_2$ . В этом случае решение системы (1) имеет вид:

$$x = C_1^{(1)} \alpha e^{\lambda_1 t} + C_2^{(2)} \alpha e^{\lambda_2 t} \quad (3)$$

где  ${}^{(i)}\alpha = \begin{pmatrix} {}^{(i)}\alpha_1 \\ {}^{(i)}\alpha_2 \end{pmatrix}$  некоторые постоянные столбцы - собственные векторы матрицы  $A$ ,

отвечающие собственным значениям  $\lambda_{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Точка  $(0, 0)$  является согласно теореме асимптотической устойчивой, и  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Исследуем характер приближения более подробно. Имеем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{C_1 \lambda_1 {}^{(1)}\alpha_2 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 {}^{(2)}\alpha_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 \lambda_1 {}^{(1)}\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 {}^{(2)}\alpha_1 e^{\lambda_2 t}}$$

Отсюда видно, что если  $C_1 \neq 0$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{{}^{(1)}\alpha_2}{{}^{(1)}\alpha_1}$$

т. е. все интегральные траектории, кроме одной, отвечающей  $C_1 = 0$ , входят в  $(0, 0)$  с

общей касательной, уравнение которой  $x_2 = \frac{{}^{(1)}\alpha_2}{{}^{(1)}\alpha_1} x_1$  (обозначим ее \*). Заметим, что

прямая \* сама является одной из траекторий, а именно той, которая отвечает  $C_2 = 0$ .

Траектория, отвечающая  $C_1 = 0$ , также является прямой и имеем уравнение  $x_2 = \frac{{}^{(2)}\alpha_2}{{}^{(2)}\alpha_1} x_1$

(обозначим ее 2\*). Прямые \* и 2\* не совпадают, поскольку в силу линейной независимости векторов  ${}^{(i)}\alpha$  имеем  ${}^{(1)}\alpha_1 {}^{(2)}\alpha_2 - {}^{(2)}\alpha_1 {}^{(1)}\alpha_2 \neq 0$ .

Если  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, (\lambda_1 < \lambda_2)$ , то характер расположения траекторий полностью сохраняется (можно устремит  $t \rightarrow -\infty$  и провести рассуждения, аналогичные проведенным выше для  $t \rightarrow \infty$ ). Точка  $(0, 0)$  в этом случае неустойчива.

Точка покоя, отвечающая случаю действительных характеристических чисел  $\lambda_1, \lambda_2$ , не

равных друг другу, но имеющих одинаковый знак, называется узлом. Узел является асимптотически устойчивым при  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  и неустойчивым при  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ .

б) Пусть  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Точка покоя в этом случае неустойчива. Представление (3) сохраняется. Из (3) видно, что через  $(0, 0)$  проходят две траектории: одна из них (обозначим ее 1) отвечает  $C_2 = 0$  и имеет уравнение  $x_2 = {}^{(1)}\alpha_2 x_1 / {}^{(1)}\alpha_1$ , а другая (обозначим ее 2) отвечает  $C_1 = 0$  и имеет уравнение  $x_2 = {}^{(2)}\alpha_2 x_1 / {}^{(2)}\alpha_1$ . Но на этом сходство с узлом кончается. Вдоль траектории 2  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , а вдоль траектории 1  $x \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$  стрелки, указывающие направление возрастания  $t$ , направлены от точки  $(0, 0)$ . Нетрудно видеть, что прямая 1 является асимптотой при  $t \rightarrow \infty$  для всех траекторий, кроме 2, так как  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_2}{x_1} = \frac{{}^{(1)}\alpha_2}{{}^{(1)}\alpha_1}$ . Прямая 2 играет аналогичную роль при  $t \rightarrow -\infty$ . Точка покоя, отвечающая случаю действительных характеристических чисел противоположного знака, называется седлом. Седло является неустойчивой точкой покоя. Траектории 1 и 2, проходящие через седло, называются сепаратрисами.

в) Пусть характеристические числа матрицы  $A$  - комплексные. В силу действительности  $A$  они будут комплексно сопряженными, т. е.  $\lambda_1 = \lambda_2^* = \lambda$ . Соответствующие компоненты собственных векторов  ${}^{(i)}\alpha$  будут также комплексно сопряженными, а так как мы рассматриваем действительные решения, то и произвольные постоянные должны быть комплексно сопряженными. Таким образом,

$$x_1 = C\alpha_1 e^{\lambda t} + C^* \alpha_1^* e^{\lambda^* t}, x_2 = C\alpha_2 e^{\lambda t} + C^* \alpha_2^* e^{\lambda^* t} \quad (4)$$

Подставляя сюда  $\lambda = p + iq$ , можно преобразовать эти выражения к виду

$$x_1 = e^{pt} (2\alpha \cos qt - 2\beta \sin qt), x_2 = e^{pt} (2\gamma \cos qt - 2\delta \sin qt), \quad (5)$$

где  $\alpha = \text{Re}(C\alpha_1), \beta = \text{Im}(C\alpha_1), \gamma = \text{Re}(C\alpha_2), \delta = \text{Im}(C\alpha_2)$ . Отсюда имеем

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 = e^{2pt} [(2\alpha \cos qt - 2\beta \sin qt)^2 + (2\gamma \cos qt - 2\delta \sin qt)^2].$$

Если  $p = 0$  (характеристические числа - чисто мнимые), то  $x_1, x_2$  и  $\rho$  являются периодическими функциями  $t$  периода  $2\pi/q$ . Это значит, что каждому  $C$  на фазовой плоскости отвечает некоторая замкнутая кривая. Эти кривые не пересекаются, так как всюду, кроме точки  $(0, 0)$ , для (2) справедлива теорема единственности (рис. 1).

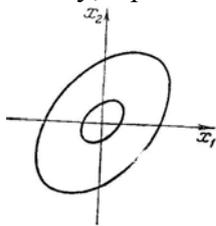


Рис. 1.

Более детальное исследование показывает, что замкнутые кривые, о которых идет речь, являются эллипсами. В самом деле, определитель

$$\begin{vmatrix} 2\alpha & -2\beta \\ 2\gamma & -2\delta \end{vmatrix} \neq 0,$$

в противном случае существовало бы решение вида  $x_1 = ax_2$  (а вещественное). Подставляя сюда  $x_1$  и  $x_2$ . Из (4), получим в силу линейной независимости  $e^{\lambda t}$  и  $e^{\lambda^* t}$  соотношение  $\alpha_1 = a\alpha_2$ , откуда  $(a_{11} - \lambda)a = -a_{12}$ , что возможно лишь при вещественных  $\lambda$ .

Таким образом, (5) можно разрешить относительно  $\cos qt$  и  $\sin qt$  и, приравняв сумму их квадратов единице, получить

$$(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)^2 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)^2 = 1.$$

Если же  $p \neq 0$ , то при изменении  $t$  на величину периода  $\rho$  уже не возвращается к прежнему значению, а уменьшается или увеличивается в соответствии с  $p < 0$  или  $p > 0$ .

На фазовой плоскости получаются уже не замкнутые, а спиралевидные кривые. Если  $p < 0$ , то  $\rho \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , спираль сходится в точку  $(0,0)$ , которая является асимптотически устойчивой (рис. 2). Если же  $p > 0$ , то аналогичная картина имеет место при  $t \rightarrow -\infty$ , а с возрастанием  $t$  спираль расходится из точки  $(0, 0)$ .

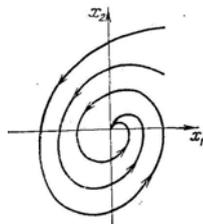


Рис. 2.

Точка покоя, отвечающая комплексно сопряженным характеристическим числам с отличной от нуля действительной частью  $p$ , называется фокусом. При  $p < 0$  фокус асимптотически устойчив, а при  $p > 0$  неустойчив.

Точка покоя, отвечающая чисто мнимым характеристическим числам, называется центром. Центр является устойчивой, но не асимптотически устойчивой точкой покоя. Мы не будем останавливаться на случае кратных характеристических чисел, а также на случае, когда имеется характеристическое число, равное нулю.

Замечания. 1. Точка  $(0,0)$  была названа выше точкой покоя для линейной системы (1).

дадим общее определение точки покоя, из которого будет ясно, что точка покоя не обязательно является началом координат, а для нелинейной системы точек покоя может быть несколько. Рассмотрим нелинейную автономную систему при  $n = 2$ . Пусть  $x_i = \bar{x}_i, (i = 1,2)$  удовлетворяют системе уравнений  $f_i(x_1, x_2) = 0$ . Тогда, очевидно, те же

$$x_i = \bar{x}_i \text{ удовлетворяют дифференциальной системе } \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), (i = 1,2, \dots, n),$$

поскольку  $\bar{x}_i$  не зависят от  $t$ . Это решение описывает состояние покоя и на фазовой плоскости изображается точкой. Точки фазовой плоскости, отвечающие решениям вида  $x_i = \bar{x}_i = const$ , называются точками покоя. Соответствующей заменой переменных каждую точку покоя можно перевести в начало координат. Тогда, если  $f_i$  представима в

$$\text{виде } f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + {}^{(2)}R_i, \text{ то система первого приближения } \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

совпадает с (1).

2. Исследование расположения траекторий в окрестности точек покоя дает некоторую информацию относительно расположения фазовых траекторий на всей плоскости, но, конечно, полного решения этой сложной глобальной задачи не дает.

Для изучения картины на фазовой плоскости, или, как иногда говорят, фазового портрета

системы  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), (i = 1,2, \dots, n)$ , важно исследовать не только точки покоя.

Нередко встречаются замкнутые траектории (замкнутая траектория означает периодическое движение) обладающие тем свойством, что в окрестности таких

траекторий нет других замкнутых траекторий, а все траектории как бы «наматываются») на эту единственную замкнутую траекторию которая получила название предельного цикла или, наоборот, «сматываются» с нее. Предельные циклы, таким образом могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Исследование предельных циклов важно также с точки зрения существования устойчивых периодических режимов в физических системах.

Пример. Система

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a \right) - x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a \right) + x_1 \quad (6)$$

имеет точку покоя  $x_1 = 0, x_2 = 0$  и предельный цикл  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ . В существовании такого цикла легко убедиться, перейдя к полярным координатам  $x_1 = \rho \cos \theta, x_2 = \rho \sin \theta$ , в которых система (6) принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\rho - a), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

3. С повышением размерности  $n$  фазовая картина существенно усложняется, возникают новые явления для изучения которых развиты многочисленные методы. Исследование фазового портрета системы дифференциальных уравнений является одной из задач так называемой качественной теории дифференциальных уравнений.

#### Заключение.

После А.М. Ляпунова теория устойчивости движения развивалась по различным направлениям, возникло даже направление, которое можно условно назвать прикладным. Речь идет о создании общих методов исследования устойчивости движения отдельных, достаточно обширных классов системы.

Теория устойчивости движения широко применяется в физике, астрономии, химии и даже биологии. Особое значение теория устойчивости имеет для техники. Корабль, самолет, ракета при своем движении должны устойчиво сохранять заданный курс. Турбины, генераторы должны устойчиво сохранять заданный режим работы. Гигроскопический компас должен устойчиво показывать направление географического меридиана. Теория устойчивости нашла свое применение в работе программы математических вычислений MathCAD и т.п. В заключение отмечу, что теория устойчивости движения еще далека от завершения. Она продолжает развиваться, охватывая все более широкий круг вопросов.

### Наилучшие $M$ -членные тригонометрические приближения классов $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$ .

**Стасюк Сергей Андреевич**

научный сотрудник, кандидат физ.-мат. наук  
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина  
E-mail: [stasyuk@imath.kiev.ua](mailto:stasyuk@imath.kiev.ua)

В докладе представляются результаты о наилучших  $M$ -членных тригонометрических приближениях классов  $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$  периодических функций многих переменных.

Пусть  $L_q$  – пространство Лебега  $2\pi$ -периодических по каждой переменной функций  $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$  со стандартной нормой  $\|\cdot\|_q$ ;  $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$  – классы функций, которые при конкретном выборе определяющих их параметров (в частности, функции  $\Omega(\cdot)$ ) совпадают с известными классами Бесова  $B_{p,\theta}^r$ . Изучаются величины

$$e_M(B_{p,\theta}^\Omega(\gamma))_q = \sup_{f \in B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)} \inf_{\Theta_M} \inf_{P(\Theta_M; \cdot)} \|f(\cdot) - P(\Theta_M; \cdot)\|_q, \quad (1)$$

которые называются наилучшими  $M$ -членными тригонометрическими приближениями классов  $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$  в метрике  $L_q$  ( $P(\Theta_M; x) = \sum_{j=1}^M c_{k^j} e^{i(k^j, x)}$ ,  $\Theta_M = \{k^j\}_{j=1}^M$  – система векторов  $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$  с целочисленными координатами,  $c_{k^j}$  – произвольные коэффициенты).

Решаются задачи о слабой асимптотике величины (1) в случае, когда функция  $\Omega(t)$ , которая присутствует в определении классов  $B_{p,\theta}^\Omega(\gamma)$  имеет вид:

$$\Omega(t) = \omega \left( \prod_{j=1}^d t_j^{\gamma_j} \right) \quad (2)$$

где  $\omega(\tau)$  – функция (одной переменной) типа модуля непрерывности порядка  $l$ , которая удовлетворяет условиям Бари-Стечкина  $(S)$  и  $(S_l)$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$  – вектор с упорядоченными координатами  $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_d$ .

Сформулируем некоторые из полученных результатов.

**Теорема.** Пусть  $1 \leq \theta \leq \infty$ , функция  $\Omega(t)$  определена равенством (2), причем  $\omega(\tau)$  удовлетворяет условию  $(S)$  с некоторым  $\alpha > \max\{1/p; 1/2\}$ . Тогда для  $1 \leq p \leq 2 < q < \infty$ , или  $2 < p < q < \infty$  имеем

$$C_1 \beta(M) \square e_M(B_{p,\theta}^\Omega(\gamma))_q \square C_2 \beta(M),$$

$$\text{где } a_+ = \max\{a; 0\}, \beta(M) = \omega \left( \frac{\log^{v-1} M}{M} \right) M^{(1/p-1/2)_+} (\log^{v-1} M)^{1/2-1/\theta-(1/p-1/2)_+}, a$$

$C_1, C_2$  не зависят от  $M$ .

Заметим, что из теоремы при  $\omega(\tau) = \tau^r$ , следует соответствующий результат для классов  $B_{p,\theta}^r$ , полученный ранее А.С. Романюком.

## Уточнение экспертных оценок, выставленных в ранговых шкалах

**Стрижов Антон Вадимович**

Студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: anton.strijow@gmail.com

Цель исследования – найти способ уточнения экспертной оценки качества объектов с помощью оценок, выставленных в ранговых шкалах, и измеряемых данных.

Даны  $n$  объектов, измеряемые по каждому из  $m$  признаков. Результаты измерений записаны в матрицу  $A$  размера  $m \times n$ . Эксперт задает ранговые оценки качества объектов и важности показателей. Скаляр, соответствующий объекту, называется интегральным индикатором качества объекта. Скаляр, соответствующий показателю, называется весом показателя. Векторы весов и индикаторов связаны формулой  $\mathbf{q} = A\mathbf{w}$ . Требуется найти такую оценку, вычисленную в линейной шкале, что векторы весов и индикаторов удовлетворяют ранговым оценкам.

Векторы  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{q}$  принадлежат пространствам  $R^n$  и  $R^m$  соответственно. Назовем их пространством весов и пространством индикаторов. Пусть  $\mathbf{w}=(w_1, w_2, \dots, w_n)$  – произвольный вектор пространства весов такой, что  $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0$ , а  $W$  – множество всех таких векторов из этого пространства. Система неравенств получена из ранговой оценки, заданной экспертом. Аналогично,  $\mathbf{q}=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , а  $Q$  – множество векторов из пространства индикаторов, удовлетворяющих системе неравенств  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n \geq 0$ .

Тогда  $W$  – пересечение конечного числа полупространств, граничные плоскости которых проходят через одну точку, или многогранный конус. Количество конусов, задаваемых системами неравенств  $w_{i(1)} \geq \dots \geq w_{i(n)} \geq 0$ , полученными из системы  $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n \geq 0$  перестановкой элементов, равно  $n!$ . Аналогичные утверждения верны для индикаторов.

Поставим в соответствие каждому вектору  $\mathbf{w}_0$  пространства весов вектор  $\mathbf{q}_0 = A\mathbf{w}_0$ , принадлежащий пространству индикаторов. Полученное отображение переводит многогранный конус в многогранный конус. Если в одном пространстве два произвольных многогранных конуса пересекаются, то их линейные отображения в другое пространство тоже пересекаются. В частности, это верно для конусов  $W$  и  $Q$ , что свидетельствует о непротиворечивости следующего метода.

Ранговые оценки задают в пространствах весов и индикаторов многогранные конусы. Если линейное отображение конуса из пространства весов в пространство индикаторов пересекается с конусом, заданном в пространстве индикаторов, то искомая уточненная экспертная оценка принадлежит их пересечению. Если же они не пересекаются, то такой оценки не существует. Тогда предлагается отыскать компромисс между выставленной экспертной оценкой и вычисленной. Для этого необходимо пересечь оба конуса плоскостью, перпендикулярной какой-либо образующей одного из конусов. Если полученные пересечения ограничены, то они – многогранники размерности  $m-1$ , и у них есть ближайшие точки. Ближайшие точки этих многогранников задают две различные экспертные оценки – выставленную и вычисленную. Затем по этим двум оценкам, с помощью описанного в [1] алгоритма, предлагается найти согласованную.

Результат исследования – метод получения экспертной оценки, уточненной в линейной шкале, подтвержденный теоремами.

## **Об оценках первого собственного значения задачи Штурма—Лиувилля с весовым интегральным условием**

*Тельнова Мария Юрьевна*

*аспирант*

*Московский государственный университет экономики статистики и информатики,  
Москва, Россия*

*E-mail: [mytelnova@yandex.ru](mailto:mytelnova@yandex.ru)*

Рассмотрим задачу

$$y'' - Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0. \quad (2)$$

Пусть  $T_{\alpha, \gamma}$  — множество таких действительных неотрицательных измеримых на отрезке  $[0, 1]$  функций  $Q$ , что выполнены условия  $\int_0^1 x^\alpha Q(x)^\gamma dx = 1$ ,  $(\alpha, \gamma \in R, \gamma \neq 0)$ ,

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x) dx < +\infty.$$

Из вариационного принципа следует, что первое собственное значение  $\lambda_1$  задачи (1)–(2) может быть найдено следующим образом:

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 (y'(x)^2 + Q(x)y^2(x)) dx}{\int_0^1 y^2(x) dx}.$$

Пусть  $m_{\alpha,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\gamma}} \lambda_1(Q)$ ,  $M_{\alpha,\gamma} = \sup_{Q \in T_{\alpha,\gamma}} \lambda_1(Q)$ .

**Теорема.** Если  $\gamma > 0$ , то  $m_{\alpha,\gamma} = \pi^2$ ; если  $\gamma < 0$ , то  $m_{\alpha,\gamma} \leq \pi^2 + 1$  при  $\alpha \geq 0$  и  $m_{\alpha,\gamma} \leq 5\pi^2$  при  $2\gamma \leq \alpha < 0$ .

Если  $\gamma < 0$  или  $\gamma > 1$ , то  $M_{\alpha,\gamma} = \infty$  при  $\alpha > 2\gamma - 1$ .

Если  $0 < \gamma < 1$ , то  $M_{\alpha,\gamma} = \infty$ .

Если  $\gamma > 1$ , то  $M_{\alpha,\gamma} \leq \left(1 + \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma-1}{\gamma}}\right) \pi^2$  при  $0 \leq \alpha \leq 2\gamma - 1$  и  $M_{\alpha,\gamma} \leq 2\pi^2$  при  $\alpha < 0$ .

Если  $\gamma = 1$ , то  $M_{\alpha,\gamma} \leq 2\pi^2$  при  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $M_{\alpha,\gamma} \leq \frac{5}{4}\pi^2$  при  $\alpha < 0$ .

## Структура группы автоморфизмов $n$ -однородных $C^*$ -алгебр

**Трубников Игорь Юрьевич**

аспирант

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

E-mail: [itrubnikov@gmail.com](mailto:itrubnikov@gmail.com)

В данной работе рассматриваются  $n$ -однородные  $C^*$ -алгебры, т.е. алгебры, у которых все неприводимые представления конечномерны и имеют размерность  $n$ . Под автоморфизмом  $C^*$ -алгебры понимается автоморфизм, сохраняющий также структуру  $*$ -алгебры.

Пусть  $A$  есть произвольная  $n$ -однородная  $C^*$ -алгебра, а  $M_A$  – пространство неприводимых представлений этой алгебры. Исследуются специальные подгруппы группы  $Aut A$  всех автоморфизмов алгебры  $A$ : подгруппа  $Inn A$  внутренних автоморфизмов, подгруппа  $Aut_Z A$  центральных автоморфизмов, т.е. таких, которые оставляют каждый элемент из центра  $Z$  алгебры  $A$  на месте, и другие.

Каждому центральному автоморфизму  $\tau \in Aut_Z A$  можно специальным образом поставить в соответствие элемент  $\sigma(\tau)$ , принадлежащий группе  $H^2(M_A, \square)$  когомологий Чеха пространства  $M_A$  с целочисленными коэффициентами. В этом случае критерием «внутренности» автоморфизма является

**Теорема 1.** Произвольный автоморфизм  $\tau \in Aut_Z A$  является внутренним (т.е. принадлежит подгруппе  $Inn A$ ) тогда и только тогда, когда  $\sigma(\tau) = 0$ .

С помощью следующего результата удастся более точно локализовать образ  $\sigma(Aut_Z A)$  в  $H^2(M_A, \square)$ .

**Теорема 2.** Справедлива короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Inn } A \longrightarrow \text{Aut}_Z A \xrightarrow{\sigma} \text{Tor } H^2(M_A, \square),$$

(1)

где  $\text{Tor } H^2(M_A, \square)$  обозначает подгруппу кручения группы  $H^2(M_A, \square)$ .

Через  $C(M, \square^{n \times n})$  будем обозначать алгебру непрерывных матриц-функций на произвольном компактном пространстве  $M$ . Следующая теорема является основным результатом данной работы. Несмотря на простоту формулировки, ее доказательство требует детального владения техникой теории расслоенных пространств и теории когомологий.

**Теорема 3.** Для любого элемента  $g \in \text{Tor } H^2(M, \square)$  найдется число  $n_g \in \square$  и автоморфизм  $\tau_g \in \text{Aut}_Z C(M, \square^{n \times n})$ , такой, что  $\sigma(\tau_g) = g$ .

### К задаче автоматной аппроксимации реальных языков

*Холоденко Александр Борисович*

*младший научный сотрудник*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: [kholoden@mech.math.msu.su](mailto:kholoden@mech.math.msu.su)*

Задача аппроксимации реальных языков часто встаёт при построении сложных компьютерных систем, включающих в себя обработку естественно-языковых текстов. В частности, эта задача является крайне актуальной при построении систем распознавания слитной речи. К сожалению, большинство работ, связанных с моделированием естественных языков, носит чисто инженерный характер. В данной работе была предпринята попытка выделить основные свойства вероятностных (n-граммных) языковых моделей путём переноса их на случай бесконечных формальных языков. Более точно, n-граммой языка  $L$  для пары  $(\varpi, a)$ ,  $|\varpi a| = n$  называется величина

$$\Gamma_{\varpi a} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{l_{\varpi a}(s)}{\sum_{\varpi': |\varpi'| = |\varpi|} l_{\varpi' a}(s)},$$

$$l_{\varpi}(s) = |PL_{\varpi}(s)|, \text{ где } PL_{\varpi}(s) = \{\alpha \in A^* \mid \exists \beta, \delta \in A^* : \alpha = \delta \varpi, |\alpha| = s, \alpha \beta \in L\}$$

В том случае, если для некоторого языка  $L$  существуют все n-граммы для некоторого  $n$ , то такой язык называется марковским языком порядка  $n$ . Будем обозначать класс таких языков через  $M(n)$ . Если язык  $L$  является марковским для любого  $n$ , то будем называть такой язык просто марковским и обозначать класс всех таких языков через  $M$ .

Несложно заметить, что в классе регулярных языков существуют как марковские, так и не марковские языки.

Оказывается, справедливо несколько утверждений относительно классов  $M(n)$  и  $M$ .

**Теорема 1.** Если  $L \in M(n)$ , то  $L \in M(k)$  для всех  $k < n$ .

**Теорема 2.** Для любого  $n$  существует такой язык  $L$ , что  $L \in M(n)$ , но  $L \notin M(n+1)$ .

**Теорема 3.** Для любого языка  $L \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , что из  $L \in M(n_0)$  следует, что  $L \in M$ .

Можно показать, что число марковских языков велико. А именно, отношение числа марковских языков, задаваемых автоматами с  $\mathbb{N}$  состояниями по отношению к числу всех регулярных языков, задаваемых автоматами с  $\mathbb{N}$  состояниями стремится к  $(1-1/e)$  при неограниченном возрастании  $\mathbb{N}$ .

Для практики также важно понимать, каким образом можно синтезировать автоматы с указанными свойствами. Оказывается, справедливо следующее утверждение. Для любого марковского языка  $L$  со списком биграмм  $\pi$  можно построить автомат  $A$ ,

имеющий (рациональный) список биграмм  $\pi'$ , сколь угодно мало отличающийся от  $\pi$ . В случае, если список биграмм  $\pi$  сам является рациональным, то  $\pi' = \pi$ . При этом автомат  $A$  строится конструктивно, путём применения операции склеивания автоматов из простейших примитивов – циклов и древесных автоматов.

**Об экспоненциально притягивающем интегральном многообразии для гиперболического уравнения с диссипацией.**

**Чалкина Наталья Александровна**

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [raketka02@mail.ru](mailto:raketka02@mail.ru)

В ограниченной области  $\Omega$  рассматривается смешанная краевая задача для квазилинейного гиперболического уравнения с диссипацией:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + 2\gamma \partial_t u = \Delta u + f(u, \partial_t u), & u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in H_0^1(\Omega) \\ \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau(x) \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

где  $\gamma$  – положительный коэффициент диссипации; функция  $f(u, u_t)$  является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условию Липшица по обоим переменным:  $\|f(u_1, p_1) - f(u_2, p_2)\| \leq l_1 \|u_1 - u_2\| + l_2 \|p_1 - p_2\|$  для  $\forall u_1, u_2 \in \square, \forall p_1, p_2 \in \square$

Поставленная задача имеет единственное решение  $u \in C([\tau, T]; H_0^1(\Omega))$ ,  $\partial_t u \in C([\tau, T]; L_2(\Omega))$  для любого  $T \geq \tau$ . Этой задаче соответствует процесс  $\{Y(t, \tau)\}$ ,  $t \geq \tau$ , действующий в пространстве  $H = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$  по формуле

$$Y(t, \tau)(u_\tau(x), p_\tau(x)) = y(t) \equiv (u(t, x), p(t, x)) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega) = H,$$

где  $u(t, x)$  – решение задачи,  $p(t, x) = \partial_t u(t, x)$  – его производная по  $t$ ,  $y = (u, p) \in H$ . Процесс  $\{Y(t, \tau)\}$  является непрерывным по совокупности переменных  $(y_\tau, t)$ .

Обозначим  $\lambda_k$  – собственные значения оператора  $-\Delta$  в области  $\Omega$  с условиями Дирихле на границе,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$

**Теорема.** Если для некоторого  $N$  выполняется условие

$$2 \max \left( l_2; \frac{|l_1 - \gamma l_2|}{\sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}} \right) < \sqrt{\gamma^2 - \lambda_N} - \sqrt{\gamma^2 - \lambda_{N+1}}, \quad (1)$$

то в расширенном фазовом пространстве  $H \times \square_t$  существует  $(N+1)$ -мерное липшицево интегральное многообразие  $M$  (то есть наряду с точкой  $(y_\tau, \tau) \in M$  в нем содержится вся интегральная кривая  $(y(t), t)$ ,  $t \geq \tau$ ), которое экспоненциально притягивает все решения исходной задачи, а именно: для каждого решения  $y(t) = Y(t, \tau)y_\tau$  поставленной задачи существует «след» при  $t \rightarrow +\infty$  на  $M$ , т.е. для любого  $T \geq \tau$  такое решение  $\tilde{y}(t)$ ,  $(\tilde{y}(t), t) \in M$  задачи, для которого

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq C |y(\tau) - \tilde{y}(\tau)| e^{-\mu(t-\tau)} \text{ для } \forall t \geq \tau, \mu > 0.$$

Замечание. Если  $\gamma l_2 < l_1$ , то (1) равносильно условию существования инерциального многообразия в случае, когда  $f$  зависит только от  $u$ :  $f = f(u)$ , полученному в [1].

**Разрешимость краевых задач для уравнения теплопроводности высокого порядка с разрывными начальными функциями**

**Шарин Евгений Федорович**

аспирант

Институт математики и информатики Якутского государственного университета

им. М.К. Аммосова, Якутск, Россия

E-mail: [eugene\\_sharin@mail.ru](mailto:eugene_sharin@mail.ru)

Краевые задачи для параболических уравнений встречаются во многих отделах математики и математической физики. Такие линейные уравнения, но с разрывными коэффициентами перед производной по времени, и составляют предмет исследования настоящей работы. Эти уравнения, как второго, так и произвольного порядка изучаются главным образом в направлении разрешимости в гладких классах Гёльдера и анализа связей между гладкостью решений и гладкостью известных функций, входящих в задачу.

Настоящая работа посвящена исследованию гладкости решений краевых задач для параболических уравнений с негладкими коэффициентами в классах Гёльдера. Такие краевые задачи стали предметом изучения с начала XX века. Одним из первых работ в этом направлении были работы М. Жевре, позже были опубликованы труды М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, С.А. Терсенова, И.М. Петрушко, В.Н. Монахова, А.И. Кожанова, С.Г. Пяткова, С.В. Попова и многих других авторов.

Актуальность изучения таких задач обоснована их физическим применением в моделировании таких процессов как распространение тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков и другие.

В полосе  $D = \Omega \times (0, T)$ , где либо  $\Omega$  область в  $R$ , либо  $\Omega \equiv R$  рассмотрим уравнение

$$f(x)u_t = Lu, \quad (1)$$

где  $L$  - строго эллиптический оператор  $2n$ -го порядка по переменным  $x$  с коэффициентами из класса Гельдера в  $\bar{D}$ . Пусть в уравнении (1) функция  $f(x) > 0$  и терпит разрыв первого рода в точке  $x = 0$ . Решение уравнения (1) в классе ограниченных функций будет единственным при выполнении начальных условий

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \text{ при } x \in \Omega^+, \\ u(x, 0) = u_1(x) \text{ при } x \in \Omega^-, \end{cases} \quad (2)$$

и условий непрерывности производных до  $2n-1$ -го порядка

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|_{x=+0}, \quad 0 < t < T, \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1). \quad (3)$$

Решение поставленной задачи разыскивается в виде параболических потенциалов простого слоя из пространства Гельдера  $H_{x,t}^{p, p/2n}$ ,  $p = 2l + \gamma, 0 < \gamma < 1$ .

Доказано, что для однозначной разрешимости краевой задачи (1) – (3) необходимо и достаточно выполнения  $[p]+1$  условий на данные задачи вида:

$$L_s(u_0, u_1) = 0, \quad s = 1, \dots, [p]+1, \quad (4)$$

где  $L_s$  – интегральные операторы от функций  $u_0(x), u_1(x)$ .

**Теорема.** Пусть  $u_0(x), u_1(x) \in H^p$ . Тогда при выполнении  $[p]+1$  условий (4) существует единственное решение уравнения (1) в  $\Omega^\pm$  из пространства  $H_{x,t}^{p, p/2n}$ ,  $p = 2l + \gamma, 0 < \gamma < 1$ , удовлетворяющее условиям (2), (3).

## Реализация булевых функций информационными графами.

**Шуткин Юрий Сергеевич**

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [yurii.shutkin@gmail.com](mailto:yurii.shutkin@gmail.com)

### Введение

Рассматривается задача реализации булевых функций с помощью информационных графов. Такая реализация дает возможность, базируясь на свойствах вероятностного пространства запросов, строить различные информационные графы и минимизировать тем самым количество действий, затраченных на вычисление функции. В нашей задаче эти действия есть ни что иное, как вычисление предикатов на ребрах графа, а суммарно затраченные усилия – сложность этого графа. Такой функционал сложности соответствует среднему нагреванию чипа, реализующего какую-либо булеву функцию.

Реализация функций с помощью информационных графов может также соответствовать случаю, когда мы эмулируем контактную схему и ее функционирование на компьютере. В этом случае функционал сложности для простейших информационных графов как раз отвечает затратам на вычисление предикатов на контактах схемы.

### Формулировка результатов

Получены основные оценки сложности реализации, такие как оценка функции Шеннона сложности реализации функции в классе информационных графов и информационных деревьев. Также для почти всех булевых функций получен порядок сложности реализации их информационными графами, а для деревьев установлена асимптотика сложности.

Для различных классов булевых функций удалось установить асимптотические нижние и верхние оценки. Порядок этих оценок для всех предполных классов булевых функций  $n$  переменных совпадает и равен  $n$ . Такой же порядок получен и для класса всех булевых функций  $n$  переменных.

Напомним, что Лупановым О.Б. было показано, что объемная сложность реализации булевых функций с помощью контактных схем асимптотически равна  $2^n/n$  (оценка функции Шеннона сложности реализации булевых функций  $n$  переменных, то есть оценка для самой “плохой” функции  $n$  переменных в терминах объемной сложности). По конструкции информационный граф ничем не отличается от контактной схемы, и его объем равен объему соответствующей контактной схемы. Это означает, что на самом деле большая часть контактной схемы используется лишь частично. Причем большая ее часть попросту не используется для вычисления значения функции на конкретном наборе переменных, если усреднять по всех булевым наборам.

Таким образом, полученные результаты позволяют получать представление о таких характеристиках контактной схемы, как нагреваемость, если эта контактная схема реализована физически, и скорость вычисления, если она смоделирована на компьютере.

В качестве дополнения были так же рассмотрены случаи нестандартных базисов и реализации системы булевых функций.

## Об оценках минимального расстояния для параметров линейных моделей временных рядов

**Эрлих Иван Генрихович**

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [erlikh-ivan@yandex.ru](mailto:erlikh-ivan@yandex.ru)

### Постановка задачи

Рассматривается задача построения оценок минимального расстояния для параметра стационарной модели авторегрессии первого порядка:  $u_i = \beta u_{i-1} + \varepsilon_i$ ,  $|\beta| < 1, i \in Z$ , по наблюдениям  $u_1, \dots, u_n$ .

Классическая оценка (см.[1])  $\beta_n := \arg \min \{K_h(t); t \in R\}$  получается минимизацией функционала  $K_h(t) = \int [n^{-1/2} \sum_{i=1}^n h(u_{i-1}) \{I(u_i \leq x + tu_{i-1}) - F(x)\}]^2 dG(x)$ , где  $F(x)$  - функция распределения инноваций  $\varepsilon_i$ ,  $I(\cdot)$  - индикатор события.

В большинстве задач распределение инноваций  $\varepsilon_i$  неизвестно и использование определенной выше оценки невозможно. Данная проблема была разрешена лишь для случая симметрично распределенных инноваций. Вместо функционала  $K_h(t)$

рассматривается  $K_h^+(t) := \int [n^{-1/2} \sum_{i=1}^n h(u_{i-1}) \{I(u_i \leq x + tu_{i-1}) - I(-u_i < x - tu_{i-1})\}]^2 dG(x)$ . Было

показано, что предельные распределения  $\beta_n$  и  $\beta_n^+$  совпадают. Если нет симметрии, то находить оценку минимизацией функционала  $K_h^+(t)$  нельзя. Само же предположение о симметрии инноваций нельзя считать естественным.

### Формулировка результатов

Для решения данной проблемы мы использовали подход, описанный в [2] для определения оценок минимального расстояния для параметров ARCH модели. Вместо функционала  $K_h(t)$  рассматривается функционал

$\hat{K}_h(t) = \int [n^{-1/2} \sum_{i=1}^n h(u_{i-1}) \{I(u_i \leq x + tu_{i-1}) - \hat{F}_n(x)\}]^2 dG(x)$ , где  $\hat{F}_n(x)$  - эмпирическая

функция распределения, построенная по остаткам. Показано, что при некоторых ограничениях на моменты инноваций (ограниченность четвертого момента) и функции  $h(x)$  (ограниченность и монотонность) и  $G(x)$  (монотонность и ограниченность вариации) соответствующая оценка  $\hat{\beta}_n = \arg \min \{\hat{K}_h(t), |t| \leq B < \infty\}$  является  $\sqrt{n}$ -состоятельной оценкой параметра  $\beta$  и доказана ее асимптотическая гауссовость с таким же предельным распределением, как у  $\beta_n$ .

Описанный метод распространен так же на модель скользящего среднего. Это более сложная с технической точки зрения модель, однако, полученные ответы схожи с ответами для авторегрессионной модели. В будущем предполагается распространить описанную технику для определения оценок минимального расстояния в ARMA модели.

**К доказательству Л. Бранжа теоремы о коэффициентах  
Юферова Галина Александровна**

*Аспирант*

*Томский государственный университет, Томск, Россия*

*E-mail: [galaOK@sibmail.com](mailto:galaOK@sibmail.com)*

Важной частью доказательства гипотезы Бибераха, первоначально предложенного Л. Бранжем, является установление знака функций, составляющих семейство

$$Y_{s,n}(\tau), \quad s=1,\dots,n-1, \quad n \in N \setminus \{1\}, \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

Функции  $Y_{s,n}(\tau)$  являются компонентами решения системы

$$y_1' = -(n-1)y_1,$$

$$y_s' = 2 \sum_{j=1}^s (-1)^{s+j+1} (n-j)y_j - (n-s)y_s, \quad s=2,\dots,n-1, \quad n \in N \setminus \{1\},$$

$$y_s = y_s(\tau) \text{ с начальным условием } y_s(0) = \frac{s}{n-s}.$$

В докладе указывается связь  $Y_{s,n}(\tau)$  с решением уравнения Левнера с управляющей функцией  $\mu(\tau) = -1$ .

Показано, что

$$Y_{s,n}(\tau) = \frac{(2m)_k}{(m-1)k!} e^{-(n-s)\tau} {}_4F_3 \left[ \begin{matrix} -k, 2m+k, m-1, m-\frac{1}{2} \\ 2m-1, m, m+\frac{1}{2} \end{matrix}; e^{-\tau} \right], \quad k=s-1, m=n-k.$$

Очевидно,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} Y_{s,n}(\tau) = 0$ .

Для нахождения знака производной используется формула

$$Y_{s,n}'(\tau) = -\frac{e^{-(n-s)\tau}}{k!} (2m)_k {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -k, 2m+k, m-\frac{1}{2} \\ 2m-1, m+\frac{1}{2} \end{matrix}; e^{-\tau} \right].$$

Она преобразуется с использованием равенства

$$\frac{(2m)_{k+j}}{(m+\frac{1}{2})_j} = \frac{1}{(m)_j} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} A_l^{(k)}(m) (-k+j)_{2l} (2m+k-1-2l)_j,$$

где

$$A_l^{(k)}(m) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_l (m)_{k-l} \left(m+\frac{1}{2}\right)_{k-2l} (2m-1)_{k-2l}}{l! \left(m+\frac{1}{2}\right)_{k-l} \left(m-\frac{1}{2}\right)_{k-2l}} > 0$$

и приобретает окончательный вид

$$Y_{s,n}'(\tau) = -e^{-(n-s)\tau} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{A_l^{(k)}(m)}{(k-2l)!} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -k+2m, 2m+k-1-2l, m-\frac{1}{2} \\ 2m-1, m \end{matrix}; e^{-\tau} \right].$$

Полагая в формуле Клаузена

$${}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 2a, a+b, 2b \\ a+b+\frac{1}{2}, 2a+2b \end{matrix}; x \right] = \left\{ {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a, b \\ a+b+\frac{1}{2} \end{matrix}; x \right] \right\}^2$$

$2a = -k+2l, 2b = 2m+k-1-2l$ , получаем  $Y_{s,n}'(\tau) \leq 0$ .

Таким образом,  $Y_{s,n}(\tau) > 0, \quad 0 \leq \tau < \infty$ .

На наш взгляд, предлагаемое исследование  $Y_{s,n}(\tau)$  оказывается более простым в сравнении с подходами Аски-Гаспера и других авторов, занимавшихся изучением, развитием и совершенствованием доказательства Л. Бранжа.