Аксиоматизация вероятностных значений игр с неделимыми выигрышами

Старцев Иннокентий Александрович[1]

аспирант

Санкт-Петербургский экономико-математический институт Российской Академии наук, Санкт-Петербург, Россия

E–mail: startsevia@yandex.ru

В теории кооперативных игр изучаются ситуации, в которых агенты (*игроки*) могут кооперироваться в группы (*коалиции*). Результат кооперирования описывается с помощью функции, называемой *характеристической*, сопоставляющей каждой коалиции множество исходов, которые она может обеспечить сама без помощи других игроков. Эти исходы, например, могут оцениваться численными выигрышами. Предметом теории кооперативных игр является выработка правил (методов) распределения общего выигрыша между игроками – *решений*, сопоставляющих каждой игре множество “справедливых” исходов. Каждая такая концепция имеет своё математическое обоснование (*аксиоматическая характеризация*), на основе системы *аксиом* или *свойств* (математически формализованных принципов справедливости и рациональности).

Рассмотрен класс кооперативных *игр с неделимыми выигрышами* (НДВ-игры), моделирующий задачи распределения множества неделимых продуктов. *НДВ-игра* – это упорядоченная тройка (N,v,U), где N – конечное множество *игроков*, U – абстрактное множество, $v:2^N \to 2^U$ – *характеристическая функция*, сопоставляющая каждой коалиции $S \subseteq N$ подмножество $v(S) \subseteq U$ предметов, которыми она обладает (претендует, предпочитает, может получить). При этом отсутствуют какие-либо предпочтения и функции полезности на множествах N и U. НДВ-игры могут быть использованы при решении таких задач, как, например, распределение совместно нажитого имущества в бракоразводном процессе или распределение имущества обанкротившейся компании между кредиторами и акционерами.

Фиксируем множества U и N. Пусть $G^N(U)$ обозначает класс игр с множеством игроков N и множеством предметов U. *Значением* f на классе $G^N(U)$ называется отображение $f:G^N(U) \to (2^U)^N$, сопоставляющее каждой НДВ-игре $(N,v) \in G^N(U)$ вектор множеств $f(N,v,U) = (f_i(N,v,U))_{i \in N} \in (2^U)^N$, для краткости обозначаемый $f(N,v)$.

Существенным недостатком рассматриваемой модели является отсутствие *анонимных* методов распределения (методов, в которых игроки были бы равноправными) с непересекающимися выигрышами игроков – некоторые предметы могут оказаться в коллективной собственности. Для его устранения определено понятие вероятностного значения НДВ-игр.

Рассмотрен класс *монотонных* НДВ-игр (для которых $v(S) \subseteq v(T)$ для всех коалиций $S \subseteq T \subseteq N$) с конечным множеством $U = v(N)$ и значения, удовлетворяющие свойству *аддитивности для непересекающихся игр* ($f_i(N,v \cup w) = f_i(N,v) \cup f_i(N,w)$ для всех игроков $i \in N$ и всех игр $(N,v),(N,w) \in G^N(U)$ с $v(N) \cap w(N) = \varnothing$). Поэтому можно рассматривать и распределять все предметы из U независимо друг от друга. При таких ограничениях можно определить вероятностное значение следующим образом.

Определение. Пусть $E = \{e^{a,i}\}_{a \in U, i \in N}$ – множество вспомогательных значений НДВ-игр, называемых *элементарными*, каждое из которых назначает i-му игроку предмет a, и $\varnothing$

[1] Автор выражает признательность профессору, д.ф.-м.н. Яновской Е.Б. за помощь в подготовке тезисов.

всем остальным игрокам. *Вероятностным значением* называется вектор случайных величин $f^p = (f^{p,a})_{a\in U}$, значениями каждой из которых $f^{p,a}$ является элементарное значение.

Вероятностное значение можно отождествить с вектором независимых вероятностных распределений на множестве элементарных значений *E*: $f^p = ((\pi_1^a(N,v),\ldots,\pi_n^a(N,v)))_{a\in U}$, где $\pi_i^a(N,v) \geq 0$ – есть вероятность того, что предмет *a* будет назначен игроку *i*.

Построен алгоритм, устанавливающий соответствие между НДВ-играми и *простыми играми с трансферабельной полезностью* (ПТП-играми), решениями этих игр и свойствами их решений. Кооперативная игра *v* называется простой, если её характеристическая функция принимает значения 0 или 1, и $v(N) = 1$. Пусть S^N обозначает класс ПТП-игр с фиксированным множеством игроков *N*. *Индексом* называется функция $\varphi : S^N \to R^N$, которая каждой ПТП-игре ставит в соответствие вектор положительных чисел $\varphi(v)$, *i*-тая компонента которого интерпретируется как мера влияния *i*-го игрока, которую он может оказать на исход игры, его сила.

Пусть $U = \bigcup a$. Каждой НДВ-игре (N,v) можно поставить во взаимно-однозначное соответствие ПТП-игру $v^a \in S^N$, определяемую для всех $S \subseteq N$ и $a \in U$ по правилу $v^a(S) = 1$ при $a \in v(S)$ и $v^a(S) = 0$ во всех остальных случаях. Пусть f^p – вероятностное значение, тогда $\pi_i^a(N,v)$ можно интерпретировать как индекс φ^a ПТП-игры v^a для игрока *i*. Таким способом каждому вероятностному значению можно поставить во взаимнооднозначное соответствие индекс ПТП-игр, что позволяет использовать решения ПТП-игр в качестве вероятностей, с которыми вероятностные значения НДВ-игр распределяют выигрыш между игроками. Эти соответствия показаны на диаграмме внизу горизонтальными стрелками.

Также можно переформулировать свойства индексов ПТП-игр для значений НДВ-игр. В упрощённом виде это выглядит следующим образом: в формулировках свойств и аксиом ПТП-игр “$\varphi_i(v)$” заменяется на “$\pi_i^a(N,v)$ для всех $a \in U$”.

На следующей диаграмме представлены взаимосвязи НДВ и ПТП-игр. Вертикальные стрелки получаются из соответствующих характеризаций значения f^p и индексов $\{v^a\}_{a\in U}$.

$$\begin{array}{ccc} (N,v) & \longleftrightarrow & \{v^a\}_{a\in U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^p & \longleftrightarrow & \{\varphi^a\}_{a\in U} \end{array}$$

Теорема. Представленная диаграмма коммутативна.

Иными словами, при таком подходе вероятностные значения могут быть аксиоматически охарактеризованы на основе переформулированных свойств характеризаций решений ПТП-игр, используемых для их построения.

Тем самым, для двух указанных различных классов игр построен механизм получения взаимосвязанных концепций решений, имеющих одинаковое аксиоматическое обоснование и отвечающих общим для них принципам справедливости и рациональности.

Литература

1. Старцев И.А. (2007) Вероятностный подход к решению игр с неделимыми выигрышами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10., Вып.2. (в печати)