

## "Эволюция понятия "размерности" в физике"

Лайтнер Юлия Игоревна, аспирант

Архинчев Валерий Ефимович, д.ф.-м. н., проф.

Забайкальский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Чита, Россия

ljuliya@rambler.ru

Понятие размерности является фундаментальным понятием в физике и математике. На интуитивном уровне представляется достаточно очевидным, например, различие между точкой и линией, или линией и плоскостью. И обычно вводят Евклидову размерность пространства  $D$  как минимальное число параметров, необходимых для описания положения точки в пространстве. Размерность пространства  $D=3$ , размерность плоскости -  $D=2$ , линии -  $D=1$ , точки  $D=0$ . И если мы определим одномерный (двумерный ...  $N$ -мерный объект) как множество точек, то на первый взгляд кажется, что чем больше размерность объекта, тем больше точек он содержит, т.е. на плоскости гораздо больше точек, чем на прямой и в этом основное отличие.

Однако Кантором был построен пример однозначного дискретного отображения множества точек, принадлежащих квадрату, на отрезок. Каждой точке квадрата с координатами  $(x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots; y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots)$  ставится в соответствие точка на линии с координатой  $z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$  т.е. квадрат однозначно дискретным образом отображается на отрезок.

Аналогичный пример непрерывного отображения квадрата на линию был построен Пеано – кривая Пеано. Поэтому, чтобы отличить объекты разной размерности была введена топологическая размерность  $\text{Dim } X$  - число линейно независимых координат множества в линейном пространстве (Пуанкаре). Она равна  $\text{Dim } X = \text{Dim } C + 1$ . Здесь  $\text{Dim } C$  – это размерность топологического разреза разделяющий объект на две несвязные части. Размерность пустого множества равна  $\text{Dim } C = -1$ . Поэтому топологическая размерность точки равна  $\text{Dim } C = 0$ . Топологическая размерность объекта - всегда целое число.

Можно ввести и другую метрическую или Хаусдорфову размерность  $D_H$ . Она определяется через число покрытий малого радиуса изучаемого объекта. Хаусдорфова размерность - это предел отношения логарифма числа ячеек разбиения этого множества, содержащий хотя бы один его элемент, к логарифму величины, обратной линейному размеру ячейки при его стремлении к нулю.

$$D_H = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r)}{\ln \left( \frac{1}{r} \right)}$$

При этом метрическая размерность не обязательно должна быть целым числом. Для обычных гладких объектов топологическая размерность и метрическая размерность совпадают, и тогда вводится только одна, Евклидова размерность.

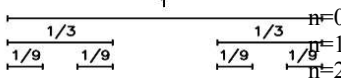
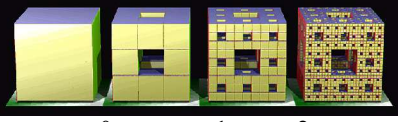
Но оказалось, что существует широкий класс объектов, для которых эти размерности не равны и тогда надо использовать спектр размерностей для более полного описания этих объектов. Например, вводят размерность самоподобия  $D$ , которая соответствует Хаусдорфовой размерности:

$$D = \frac{\ln N}{\ln n},$$

где  $N$  - число, показывающее во сколько раз увеличивается количество одинаковых элементов структуры при переходе к следующему шагу дробления, а  $n$  – число, показывающее во сколько раз при этом уменьшается линейный масштаб этих элементов. Также сами объекты, у которых различные топологические и метрические размерности, называют фракталами.

**Фракталы – самоподобные множества, у которых размерность Хаусдорфа не равна топологической размерности.**

Ниже в таблице приведены примеры вычисления фрактальных (Хаусдорфовых ) размерностей для различных объектов.

| Фрактальное множество                                                                                                                                                                                                   | Принцип построения                                                                                                                 | Фрактальная размерность                                                                                             | Примечания                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Кривая Коха</b><br><b>(снежинка)</b><br>(шведский математик Helge von Koch, который впервые описала ее в 1904) - строго самоподобный фрактал, так как он единообразно устроен в любом масштабе – регулярный фрактал. |  <p>n=0      n=1      n=2</p> <p>n - итерация</p> | $D_F = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2618$                                                                                | $Dim(line) > D_F > d$<br>снежинка Коха представляет собой линию бесконечной длины, ограничивающую бесконечную площадь                              |
| <b>Множество Кантора</b> <b>(пыль)</b><br>(немецкий математик, в 1883 г построил множество, носящее его имя).                                                                                                           |  <p>n=0      n=1      n=2</p>                     | $D_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln \left( \frac{1}{3^n} \right)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309$ | $d > D_F > Dim(point)$<br>множество Кантора представляет несчётное множество точек, обладающего мощностью континуума.                              |
| <b>Салфетка Серпинского</b> (польский математик, в 1915 году придумал занимательный объект)                                                                                                                             |  <p>n=0      n=1</p> <p>n=2</p>                  | $D_F = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,5849$                                                                                | Салфетка Серпинского имеет нулевую площадь, т.к. в процессе её построения была исключена площадь, в точности равная площади исходного треугольника |
| <b>Губка Менгера</b> - является пространственным аналогом квадратного ковра Серпинского                                                                                                                                 |  <p>n=0      n=1      n=2</p> <p>n=3</p>        | $D_F = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2,7268$                                                                               | $2 > D_F > 3$<br>губка имеет нулевой объём, но обладают бесконечной площадью поверхности своих пор                                                 |

Литература:

1. B. Mandelbrot, Fractal Geometry of Nature, San-Francisco, USA, 1982
2. Божокин С.В, Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 128 с.
3. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т, Снарский А.А.. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. – Киев: Наукова Думка, 2005, 263 с.
4. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002, 160.