Восстановление движения тела по частичной информации

М.П. Волченков
volch_max@mail.ru
Кафедра Математической теории интеллектуальных систем, мехмат МГУ

Пусть $\mathbf{Z}$ - множество целых чисел, $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ - целочисленная решетка на плоскости. Пусть A - группа ее аффинных преобразований, Γ - группа изометрических преобразований целочисленной плоскости $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.
Преобразования из Γ записываются в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ где } x, y \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

Пусть G - некоторая подгруппа преобразований в Γ, имеющих фиксированную неподвижную точку, а $S \subset \Gamma$ - подгруппа сдвигов (т.е. случай $A = E$). Заметим, что S - коммутативная группа.

Утверждение 1. $\Gamma = G \circ S$.
Утверждение 2. $S \circ G = G \circ S$.
Утверждение 3. $S < G$, $G = \Gamma / S$.
Утверждение 4. $|G| = 8$; G состоит из следующих преобразований g_i, $i = \overline{1,8}$:

1. g_1 - тождественное преобразование;
2. g_2 - поворот на 90°;
3. g_3 - поворот на 180°;
4. g_4 - поворот на 270°;
5. g_5 - симметрия относительно оси X;
6. g_6 - симметрия относительно оси Y;
7. g_7 - симметрия относительно 45°;
8. g_8 - симметрия относительно 135°.

Утверждение 5. Для любых двух точек целочисленной плоскости (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\forall g_i \in G$ существует и единственный сдвиг $z_i \in Z$ такой, что $g_i z_i \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Поставим задачу нахождения оптимального преобразования.

Задача 1. По заданным кадрам K_1 и K_2 найти единственное d максимального ранга $r(d)$.
Прямое решение задачи невозможно ввиду того, что $|\Gamma| = \infty$, предлагается алгоритм перебора элементов $K_1 \times K_2$.

Алгоритм 1.

1) Для $i = \overline{1,8}$, $(a_1, b_1) \in K_1$, $(a_2, b_2) \in K_2$ записать $z_i(a_1, b_1, a_2, b_2)$ в список R_i.
2) В списке R_i найти наиболее часто встречающийся элемент r_i.
3) Взять $r = \max\limits_{i=1,8} r_i$.
4) Выдать все (i, z_i), встречающиеся r раз.

Утверждение 6. Сложность алгоритма 1 есть $C \cdot |K_1| \cdot |K_2|$.

Пусть $d \in \Gamma$ - отображение максимального ранга для кадров K_1 и K_2.
Обозначим через $k_1 = |K_1| - r(d)$ - число пропавших точек при переходе от кадра K_1, через $k^2 = |K_2| - r(d)$ - число возникших точек кадра K_2.
Рассмотрим последовательность кадров K_1, K_2, …, K_l, $l > 2$ («фильм»). Будем считать, что $|K_1| = |K_2| = \ldots = |K_l| = n$. Аналогично понятиям k_1 и k^2 обозначим число пропавших точек s-го кадра и возникших точек t-го кадра соответственно через k_s, k^t, где $s = \overline{2, l-1}$, $t = \overline{3, l}$. Будем считать, что $k_1 = k^2 = k_2 = k^3 = \ldots = k^l = k$. Число k назовем шумом фильма.
Рассмотрим случай $K_2 = K_1$ и d, не являющееся тождественным отображением. Максимальный ранг m_1 при таких условиях назовем максимальным автодвижением кадра K_1. Будем считать, что $m_1 = m_2 = \ldots = m_l = m$, где m_j, где $j = \overline{2, l}$ определяются аналогично m_1. Назовем число m коэффициентом автосимметрии фильма. Скажем, что точки кадра K_i находятся в общем положении, если $m_i = 1$.

Теорема 1. Пусть $k < \frac{n-1}{2}$, $m < n - 2k$. Если для кадров K_1 и K_2 существует отображение $d \in \Gamma$, $r(d) \geq n - k$, то d - единственное отображение максимального ранга из Γ.

Следствие 1. Если $m = 1$, то теорема выполняется для $k = \frac{n-1}{2} - m$. Алгоритм работает для коэффициента шума, сравнимого, но не превосходящего половины числа точек в кадрах.

Следствие 2. Если движения от кадра к кадру непрерывны, то есть $d_{i,i+1} \sim d_{i+1,i+2} \sim \ldots$, то для нахождения $d_{i+1,i+2}$ нет необходимости применять алгоритм 1. Достаточно проверить близкие к $d_{i,i+1}$ отображения. Сложность такой проверки будет $Cn \cdot \ln n$.

Автор выражает благодарность профессору Бабину Д.Н. и научному сотруднику Мазуренко И.Л. за постановку задачи и ценные указания.